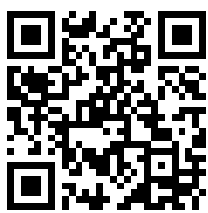
This is a reproduction of a library book that was digitized by Google as part of an ongoing effort to preserve the information in books and make it universally accessible.

Google™ books

https://books.google.com



Informazioni su questo libro

Si tratta della copia digitale di un libro che per generazioni è stato conservata negli scaffali di una biblioteca prima di essere digitalizzato da Google nell'ambito del progetto volto a rendere disponibili online i libri di tutto il mondo.

Ha sopravvissuto abbastanza per non essere più protetto dai diritti di copyright e diventare di pubblico dominio. Un libro di pubblico dominio è un libro che non è mai stato protetto dal copyright o i cui termini legali di copyright sono scaduti. La classificazione di un libro come di pubblico dominio può variare da paese a paese. I libri di pubblico dominio sono l'anello di congiunzione con il passato, rappresentano un patrimonio storico, culturale e di conoscenza spesso difficile da scoprire.

Commenti, note e altre annotazioni a margine presenti nel volume originale compariranno in questo file, come testimonianza del lungo viaggio percorso dal libro, dall'editore originale alla biblioteca, per giungere fino a te.

Linee guide per l'utilizzo

Google è orgoglioso di essere il partner delle biblioteche per digitalizzare i materiali di pubblico dominio e renderli universalmente disponibili. I libri di pubblico dominio appartengono al pubblico e noi ne siamo solamente i custodi. Tuttavia questo lavoro è oneroso, pertanto, per poter continuare ad offrire questo servizio abbiamo preso alcune iniziative per impedire l'utilizzo illecito da parte di soggetti commerciali, compresa l'imposizione di restrizioni sull'invio di query automatizzate.

Inoltre ti chiediamo di:

+ *Non fare un uso commerciale di questi file* Abbiamo concepito Google Ricerca Libri per l'uso da parte dei singoli utenti privati e ti chiediamo di utilizzare questi file per uso personale e non a fini commerciali.

+ *Non inviare query automatizzate* Non inviare a Google query automatizzate di alcun tipo. Se stai effettuando delle ricerche nel campo della traduzione automatica, del riconoscimento ottico dei caratteri (OCR) o in altri campi dove necessiti di utilizzare grandi quantità di testo, ti invitiamo a contattarci. Incoraggiamo l'uso dei materiali di pubblico dominio per questi scopi e potremmo esserti di aiuto.

+ *Conserva la filigrana* La "filigrana" (watermark) di Google che compare in ciascun file è essenziale per informare gli utenti su questo progetto e aiutarli a trovare materiali aggiuntivi tramite Google Ricerca Libri. Non rimuoverla.

+ *Fanne un uso legale* Indipendentemente dall'utilizzo che ne farai, ricordati che è tua responsabilità accertati di farne un uso legale. Non dare per scontato che, poiché un libro è di pubblico dominio per gli utenti degli Stati Uniti, sia di pubblico dominio anche per gli utenti di altri paesi. I criteri che stabiliscono se un libro è protetto da copyright variano da Paese a Paese e non possiamo offrire indicazioni se un determinato uso del libro è consentito. Non dare per scontato che poiché un libro compare in Google Ricerca Libri ciò significhi che può essere utilizzato in qualsiasi modo e in qualsiasi Paese del mondo. Le sanzioni per le violazioni del copyright possono essere molto severe.

Informazioni su Google Ricerca Libri

La missione di Google è organizzare le informazioni a livello mondiale e renderle universalmente accessibili e fruibili. Google Ricerca Libri aiuta i lettori a scoprire i libri di tutto il mondo e consente ad autori ed editori di raggiungere un pubblico più ampio. Puoi effettuare una ricerca sul Web nell'intero testo di questo libro da `http://books.google.com`

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

324 c
I 11. 646

Anno VII - N. 1-2 Gennaio-Febbraio 1927

RASSEGNA

DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA

BIBLIOTECA NAZIONALE V. E. ROMA
17 MAR 1927

SOMMARIO

ARCIERO BERNINI: La forza centrifuga e il principio della azione e reazione nell'insegnamento medio.

PASQUALE PENNA: Sulle progressioni geometriche a quattro ragioni.

Note didattiche — Una applicazione sulle coniche (PAOLO CATTANEO) — Applicazioni nell'equazione pitagorica (ALESSANDRO COLA) — Osservazione sulla costruzione di un'equazione di 2° grado (PAOLO CATTANEO).

28/47

ABBONAMENTO ANNUO:

ITALIA. . . L. **20** — ESTERO. . . L. **25**

Inviare l'importo all'Amministrazione

Piazza di Spagna, 35 ROMA (6)

ROMA

—

Direzione e Amministrazione:

Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

COLLABORATORI

E. ALLARA — A. ANTONELLI — G. APRILE — E. ARTOM — P. BARTOLI — P. BENEDETTI — G. BEMPORAD — A. BERNINI — A. BARTORELLI — F. BERIO — U. BINI — U. CASSINA — P. CATTANEO — G. V. CAVALLARO — E. CAVALLI — F. CHIAPPETTI — C. CIAMBERLINI — A. CIANFLONE — U. CRUDELI — A. COLA — S. COMPOSTO — L. CONTE — M. DEL GIUDICE — L. DELLA CASA — G. DELITALA — G. DE STEFANO — L. DI LAZZARO — S. ENA — G. FAVARO — M. FRAILIK — O. FRANCESCHI — M. FRITZSCHE — A. FONTANA — R. GALLONI — A. GANDINI — A. GASPARINI — F. GIUDICE — V. GRADARA ENA — U. GRASSI — G. LACCA — P. LANZAVECCHIA — R. LEONARDI — M. LEONCINI — V. MARSEGUERRA — E. MACCAFERRI — A. MARENGONI — M. MIGLIO — G. MIRTO — M. MIRTO — U. MONETTI — A. NATUCCI — A. NEPPI — A. PADOA — P. PANICHI — G. PEANO — N. PELLEGRINI — P. PENNA — R. PISCEL — G. QUAGLIA — N. RICCI CARTOM — F. RIMONDINI — G. SABINI — U. SALINI — A. SALMOIRAGHI — A. SCALA — P. SCATIZZI — A. SCHOR — F. SIBIRANI — N. SIRACUSANO — G. SPINA — D. SPANÒ — L. TENCA — S. TOSCANO — G. VICI — E. VIGLEZIO — L. VINGIANI — G. VITALI.

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore

(Perugia) CITTA' DI CASTELLO (Perugia)

Esecuzione accurata ed elegante di qualsiasi genere di lavoro tipografico di lusso e commerciale: Libri - Opuscoli - Riviste - Giornali - Cartoline illustrate ed illustrazioni - Carte intestate - Buste - Biglietti - Modelli - Registri - Libretti Colonici - Partecipazioni di lutto e di nozze, ecc.

Avendo l'azienda carattere di Scuola per orfani e non scopo di lucro, è in grado di praticare prezzi modicissimi.

Digitized by Google

RASSEGNA

DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA

ANNO VII

1927

ROMA

—

Direzione e Amministrazione:

Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

INDICI

INDICE PER MATERIA

ALGEBRA

Pag.

1. — Sulle progressioni geometriche a quattro ragioni - *Pasquale Penna.* 7
2. — Una applicazione sulle coniche - *Paolo Cattaneo* . . . 11
3. — Applicazioni sull'equazione pitagorica - *Alessandro Cola.* 15
4. — Osservazione sulla costruzione di un'equazione di 2° grado - *Paolo Cattaneo* 23
5. — Progressioni aritmetiche a doppia ragione - *Luigi Conte.* 43
6. — Un valore approssimato di π quale radice di un'equazione quadratrica a coefficienti razionali semplici - *Carlo Schor.* 63
7. — Su un sofisma matematico - *Leonardo Vingiani* . . . 64
8. — Problema del biliardo circolare - *Francesco Giudice.* . 78

GEOMETRIA

1. — La trigonometria su una distribuzione triangolare legata a sei punti equifattoriali - *Vincenzo G. Cavallaro* . . 25
2. — Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione — *Domenico Gallo* 39,57,97
3. — Sulla sezione aurea di un segmento - *Giulio Vici* . . 47
4. — Nuova dimostrazione del secondo e del primo teorema di Euclide sull'equivalenza dei rettangoli - *Federico Chiappetti.* 62

Digitized by Google

Pag

5. — Sopra una certa trasformazione birazionale dello spazio a quattro dimensioni - *Odoardo Franceschi* 73,109
6. — Sul problema della sezione aurea - *Pietro Panichi* . . 89
7. — Un'altra costruzione sulla media armonica di due segmenti - *Giulio Vici* 114
8. — Trasformazione di un rettangolo - *Federico Chiappetti.* 116
9. — Una dimostrazione del teorema di Pitagora - *Guido Sinopoli* 120

FISICA

1. — Densità e peso specifico - *Ugo Fornari* 46
2. — Il problema dell'elicottero — *Mario Frailik.* 49
3. — La legge di Boyle-Mariotte e la legge di Avogadro - *Arnaldo Cappelloni* 92
4. — Moto circolare uniforme e moto oscillatorio - *Ardiccio Marengoni* 94
5. — Osservazioni sulle comuni concezioni dell'inerzia - *Ernesta Goldstauf* 120

STORIA E CRITICA

1. — La forza centrifuga e il principio dell'azione e reazione nell'insegnamento medio - *Arciero Bernini* 1
2. — La classificazione delle scienze fisico-chimiche e naturali - *Alpinolo Natucci.* 84
3. — Alessandro Volta - *Ariodante Fontana.* 121
4. — Il concetto e la misura dell'energia e della potenza elettrica nelle esperienze e nel pensiero di Alessandro Volta *Carlo Schor* 133
5. — L'esposizione voltiana; il tempio voltiano; l'edizione nazionale delle opere di Alessandro Volta - *Maria Marcaletti* 138

QUESTIONI DIDATTICHE

Ancora sui temi di matematica assegnati agli esami di Stato nel 1925 - *Attilio Gasparini* 65

Digitized by Google

RECENSIONI

Pag.

1. — Berti Giovanni - Teoria dei Logaritmali - *R.* 69
2. — Cattaneo Paolo - Dieci lezioni sulla divisibilità ; elementi di geometria analitica; elementi di analisi infinitesimale - *s. t.* 69
3. — Ponzinibio Luigi - Complementi di algebra - *n. b.* . . 70

LIBRI RICEVUTI

Elenco a pagina 69.

INDICE PER AUTORE

(I numeri indicano la pagina)

Bernini 1
Cappelloni 92
Cattaneo 11, 23
Cavallaro 25
Chiappetti 62, 116
Cola 15
Conte 43
Fontana 121
Fornari 46
Frailik 49
Franceschi 73, 109
Gallo 39, 57, 97
Gasparini 65
Giudice 78
Goldstauf 120
Marcaletti 138
Marengoni 94
Natucci 84
Panichi 89
Penna 7
Schor 63, 133
Sinopoli 120
Vici 47, 114
Vingiani 64

Digitized by Google

La forza centrifuga e il principio della azione e reazione nell'insegnamento medio (*)

DI

ARCIERO BERNINI.

Sulla forza Centripeta e Centrifuga.

I.

Dopo quanto esposto nella Parte Seconda, ci sarà agevole esaminare quali, fra le sei diverse maniere osservate di concepire la forza centrifuga, possano avere bisogno di ritocco o siano addirittura da scartarsi.

Abbiamo già accennato che le prime tre maniere hanno significati ben distinti, cosicchè possono essere concepite indipendentemente l'una dall'altra. Anzi noi le abbiamo rappresentate graficamente alle lettere *a*) *b*) *c*) della Fig. a pag. 230 dell'Anno V, mediante il segmentino 2.

Quanto alle altre notammo che non apparivano abbastanza chiare. Qualcuna anzi appariva come una combinazione delle prime tre, e quindi assurda per la pretesa di voler identificare cose fra loro diverse e distinte. Per questo crediamo di doverci occupare solo delle tre prime.

La centrifuga della *prima maniera* è per definizione una forza di inerzia; cioè, è detto, di quelle che non hanno vera esistenza, ma che *fa comodo considerare*, e precisamente uguali opposte alle sollecitanti ed applicate al corpo sollecitato. Ora, dato dunque che una tal forza non esiste, si potrà concludere che sia per lo meno antididattico il volerla considerare, specie senza nemmeno mostrare, da dove scaturisca la opportunità della sua considerazione.

(*) *Continuazione* e *fine* dell'articolo col medesimo titolo in *Rassegna* A. V, N. 10-11-12 pag. 220 e A. VI, N. 2-3 pag. 31, N. 8-9 pag. 104 e N. 10-11-12, pag. 121.

35795

Digitized by Google

Solo quando possa apparire come un artificio utile, come ad es. nel principio di d'Alembert, sarà il caso di parlarne: rammentando però bene che l'ammetterla come artificio non ci darà mai il diritto di cercarne o vederne poi un reale effetto, come qualche autore lascia credere. D'altra parte la sua introduzione come artificio non deve costituire un argomento per trascurare poi di considerare nel moto rotatorio la centrifuga della seconda o della terza maniera, come accade in molti testi.

Quanto alla seconda maniera di concepire la centrifuga, e cioè come FORZA EFFETTIVA agente sul corpo rotante ed equilibrante la centripeta, si comprende come essa venga giustificata dalla considerazione di moto relativo del corpo rotante rispetto all'asse fisso od al punto fisso. Chi si trova a fare parte del sistema rotante ha necessariamente la percezione di una azione che sollecita il corpo che ruota ad allontanarsi dall'asse di rotazione (centrifuga); e comprende la necessità della applicazione di una forza contraria (centripeta), ove si voglia impedire tale allontanamento.

Una tale percezione però non può evidentemente nascere, in chi si trova fuori del sistema rotante. Chi si trova fuori osserva solo l'effetto della centripeta; e quindi viene indotto a chiamare centrifuga la reazione alla centripeta secondo il principio di Newton, agente sul centro di rotazione; il che corrisponde, come sappiamo, alla centrifuga della *terza maniera*.

È dunque ben chiara la origine di queste due ultime maniere. Essa va cercata nel duplice punto di vista, in cui si può porre l'osservatore rispetto al sistema rotante.

L'equivoco o la apparente contraddizione può manifestarsi al lettore che confronta le due maniere, unicamente perchè i trattatisti, italiani o stranieri che siano, non si preoccupano di fare alcuna premessa; e sottointendono ciascuno il proprio punto di riferimento o di osservazione, come se questo fosse l'unico possibile.

Anche però nella ipotesi che si facesse ben risaltare la PREMESSA che giustifica la distinzione, non si potrebbe dire che l'argomento diventerebbe per ciò solo sufficientemente chiarito. In generale i trattatisti si mostrano molto spicciativi su tale questione; e trascurano dei dettagli, che sarebbero invece indispensabili, specie dal punto di vista didattico. Ad es. molti della seconda maniera si limitano a parlare del moto circolare uniforme, nel quale effettivamente la centripeta e centrifuga soddisfano alla condizione

Digitized by Google

di equilibrio (1), e trascurano il moto curvilineo qualunque, in cui queste due forze non si fanno affatto equilibrio.

E non pochi autori della terza maniera, mentre escludono la considerazione della seconda maniera, sottintendendo di esaminare le cose stando fuori dal sistema, descrivono poi delle esperienze, in cui è proprio la centrifuga della seconda maniera che diventa evidente, sia pure come causa di deformazione.

II.

1) Proviamoci a trattare l'argomento, tenendo conto di quanto abbiamo esposto nella seconda parte.

Per non cominciare col postulare il terzo principio, scegliamoci per corpi due palline legate con un unico filo. Tenendone una con una mano, giriamo in tondo su di un tavolo, che le sottragga alla gravità; e trascinata così l'altra per un certo tratto lasciamo il sistema a se. Potremo mostrare così ai giovani, che entrambe finiscono per rotare attorno ad un punto del filo, che divide la distanza tra le sferette in parti inversamente proporzionali alle masse; poi, ricordando quando si è visto in cinematica per la accelerazione centripeta, potremo stabilire la uguaglianza delle due centripete agenti su ciascuna pallina. A questo punto proviamoci a rappresentare il fenomeno mediante la relazione *B*.

È ben chiaro che essa sarà diversa a seconda del punto di riferimento o di osservazione.

Se figuriamo noi stessi facenti parte del sistema girante (magari su una delle due sferette, il che corrisponderebbe a giudicare del moto rotatorio della coppia *Terra* e *Luna* stando sulla Terra o sulla Luna), la *B* diventerà;

$$(a) \qquad \begin{matrix} \rightarrow & C_p' = C_p'' & \leftarrow \\ 1) & \| \quad \| & 2); \\ \leftarrow & C_f' = C_f'' & \rightarrow \end{matrix}$$

dove le C_p rappresentano le due centripete e le C_f le due centrifughe della *seconda* maniera.

Ma la (*a*) non rappresenta che il moto circolare. Se per una eventuale variazione della elasticità del filo, questo nella rotazione si allunga o si accorcia (nel nostro caso per effetto della torsione

(1) S'intende ***relativo***.

Digitized by Google

che avviene nel filo si accorcia), cessano le uguaglianze verticali; e la B diventerà la

$$(a') \qquad \begin{matrix} \rightarrow\!\!\rightarrow C_p' = C_p'' \leftarrow\!\!\leftarrow \\ 1) \quad \vee \qquad \vee \quad 2) \\ \leftarrow\!\!\leftarrow C_f' = C_f'' \rightarrow\!\!\rightarrow \end{matrix}$$

oppure la

$$(a'') \qquad \begin{matrix} \rightarrow\!\!\rightarrow C_p' = C_p'' \leftarrow\!\!\leftarrow \\ 1) \quad \wedge \qquad \wedge \quad 2) \\ \leftarrow\!\!\leftarrow C_f' = C_f'' \rightarrow\!\!\rightarrow . \end{matrix}$$

La (a') e la (a'') potranno poi essere modificate, seguendo il criterio esposto al § 8 del Capo Secondo; e cioè facendo le uguaglianze anche in senso verticale colla introduzione delle cosidette *forze di inerzia* (di quelle che non esistono e che qui si identificano colle centrifughe della *prima* maniera) od eventualmente colla introduzione degli attriti.

Se poi consideriamo il fenomeno stando fuori del sistema, poichè allora non si manifestano che le centripete, la B si riduce alla

$$(b) \qquad \begin{matrix} \rightarrow\!\!\rightarrow C_p' = C_p'' \leftarrow\!\!\leftarrow \\ 1) \quad \vee \qquad \vee \quad 2); \\ O = O \end{matrix}$$

o pure, se vogliamo introdurre le centrifughe della *prima* maniera (forze di inerzia), alla

$$(b') \qquad \begin{matrix} \rightarrow\!\!\rightarrow C_p' = C_p'' \leftarrow\!\!\leftarrow \\ 1) \quad \| \qquad \| \quad 2). \\ \leftarrow\!\!\leftarrow I' = I'' \rightarrow\!\!\rightarrow \end{matrix}$$

E sarà bene notare che queste relazioni (b) non cambiano qualunque sia la legge colla quale, le due palline vengano a variare rotando, la loro distanza relativa.

2) A questo punto noi crediamo anche utile mostrare come dall'esempio delle due sferette si possa facilmente passare al caso ideale del moto circolare di un solo corpo attorno ad un asse situato fuori di esso, che molti considerano come primo ed anche come unico caso.

Al posto di una delle nostre sferette sostituiamone un'altra piccolissima ma piuttosto irregolare, cosicchè a causa del maggior attrito essa abbia a fermarsi, mentre l'altra continua ancora per

Digitized by Google

qualche tempo il suo moto rotatorio. Il centro comune di rotazione si sarà spostato gradatamente accostandosi alla nuova pallina. E quando questa si è fermata, noi potremo dire di aver raggiunto il caso voluto.

Ora, siccome nonostante le variazioni assunte dal fenomeno i caratteri e gli effetti delle forze in giuoco non possono essere mutati, noi converremo, postulando, che il punto fisso della Terra, che a noi appare centro fisso di rotazione della sferetta che continua a rotare, si trova anch'esso in moto rotatorio; e precisamente attorno ad un punto vicinissimo ad esso e della parte della sferetta rotante.

Si potrà dire anche che la Terra, supposta rigidamente connessa a questo punto, risentirà di questo moto; e ciò avrà lo stesso grado di verosimiglianza della affermazione che si fa col dire che, quando una sferetta cade, la Terra le va incontro.

E la rappresentazione in ogni istante del fenomeno si avrà colla (*a*) o colla (*b*), a seconda del punto di riferimento.

3) Qui è il caso di trarre una deduzione, che, per quanto oramai evidente, non è certo priva di interesse e cioè: Sia che consideriamo la (*a*) oppure la (*b*) per rappresentarci il moto circolare di un corpo attorno ad un punto fisso della Terra, noi possiamo osservare che, ad una azione centripeta non può corrispondere come reazione secondo il principio di Newton altro che una centripeta.

A tutto rigore dunque, (tenuto conto che la centrifuga della *prima* maniera non esiste), si può affermare che l'unica forza, che soddisfi al significato letterale contenuto nell'appellativo di *centrifuga* è la *centrifuga della seconda maniera.*

III.

Da tutto quanto poi si è detto, specie nella Parte Seconda, emerge che, per la chiara rappresentazione del moto circolare in genere, non è sufficiente considerare insieme alla forza centripeta, la sola centrifuga della *seconda* maniera; oppure solo la centrifuga della *terza* maniera. Parlare solo dell'una o solo dell'altra non significherà certo essere in errore e nemmeno dire inesattezze, bensì significa trattare il fenomeno solo parzialmente o per condizioni specialissime; e ciò è una grave manchevolezza dal lato didattico.

Digitized by Google

Vogliamo rendere al riguardo più chiaro il nostro pensiero, facendo una analogia col caso del sasso posto su di un sostegno.

Il considerare nel moto rotatorio solo la centrifuga della *terza* maniera, corrisponde, nel caso del sasso, ad illustrare (o postulare) il terzo principio, indicando come *azione*, la cosidetta gravità agente sul sasso o come *reazione* la forza uguale ed opposta agente sulla Terra e diretta verso l'alto.

Il terzo principio è così certo salvo, ma il fenomeno è trattato solo per *metà;* poichè non si indica nemmeno il perchè, nonostante queste due forze, i due corpi non si accostino maggiormente; proprio così dunque come nel moto circolare non si dice, colla *terza* maniera, il perchè, nonostante le due forze (centripeta e centrifuga), il corpo rotante ed il centro di rotazione, a cui sono applicate, non diminuiscano la loro distanza.

Il considerare invece nel moto rotatorio sola la centrifuga della *seconda* maniera corrisponde, nel caso del sasso, a ragionare così: « Il sasso è tirato in basso dalla gravità, ma, per la *reazione* elastica del sostegno equilibrante la gravità, esso non varia la sua posizione a noi ».

Il ragionamento è rigoroso, ma riguarda, si può dire, solo la metà di un fenomeno, perchè si parla di forze agenti su di un solo corpo; e per giunta si considera una condizione particolarissima: quella cioè in cui le due forze in parola si fanno equilibrio. Ma è trascurato il caso generale, in cui l'equilibrio non ha luogo; così come, colla *seconda* maniera di definire la centrifuga, si trascura il caso generale, in cui l'uguaglianza della centrifuga colla centripeta non vi è.

Riassumendo: Indipendentemente dalla strada che l'insegnante crederà di tenere per la illustrazione *del moto rotatorio di corpi considerati rigidi* la illustrazione non potrà giudicarsi sufficiente dal lato didattico od esente dagli errori comuni o dalle comuni inesattezze, ove non risulti ben chiaro quanto segue e cioè:

1) Che le uniche forze da considerarsi, oltre la centripeta, sono la centrifuga della *seconda* maniera (quando l'osservatore fa parte del sistema rotante), e la centrifuga della *terza* maniera (quando l'osservatore si considera fuori del sistema rotante).

2) Che, ove non si miri ad illustrare il terzo principio, si può parlare solo della centrifuga della *seconda* maniera; dovrà però in altra parte essere indicato quali siano le forze, che si conside-

Digitized by Google

rano come *reazioni*, secondo il terzo principio, rispettivamente alla centripeta ed alla centrifuga della *seconda* maniera, *considerate come azioni.*

3) Che la *centrifuga* della *terza* maniera, in quanto è reazione ad una centripeta, non risponde al significato letterale di *centrifuga*, poichè a rigore la reazione della centripeta non può essere in nessun caso centrifuga, bensì anch'essa centripeta.

4) che il moto circolare, in cui si fanno equilibrio la centripeta e la centrifuga della *seconda* maniera, deve apparire come un caso particolare del moto curvilineo qualunque, in cui quell'equilibiio viene a mancare.

Tutto ciò è ben evidente colla rappresentazione del fenomeno secondo la relazione B nelle forme di cui alle lettere *a*) ed alle lettere *b*).

Dopo ciò nessuna seria difficoltà vi potrà essere a passare al caso di 3 o più corpi fra loro vincolati, e poi alla rotazione d'un corpo attorno ad un asse che passa per esso; con che trovano soddisfacente interpretazione tutte le comuni esperienze da lezione e le ben note applicazioni della forza centrifuga.

Sulle progressioni geometriche a quattro ragioni (*)

DI

PASQUALE PENNA.

6, — Consideriamo la progressione;

$$\overset{\cdot\cdot}{\underset{\cdot\cdot}{=}} a_1\ a_2\ a_3 \ldots\ldots a_{n-1}\ a_n .$$

e facciamo l'ipotesi che il modulo del prodotto delle quattro ragioni sia minore di uno. Consideriamo la somma S_n. Per le [10], [11], [12], [13] avremo:

(*) *Continuazione* e *fine* dell'art. col medesimo titolo in *Rassegna* A. VI, N. 4-5 pag. 49 e N. 10-11-12 pag. 127.

Digitized by Google

$$S_n = \begin{cases} a_1 (1 + q_1 + q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3) \dfrac{1 - (q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n}{4}} \\ \text{per } n \text{ multiplo di quattro.} \\ a_1 \left[(1 + q_1 + q_1 q_2) \dfrac{(1 - q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n+1}{4}} + q_1 q_2 q_3 \dfrac{1 - (q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n-3}{4}} \right] \\ \text{per } n \text{ multiplo di 4 meno 1.} \\ a_1 (1 + q_1) \dfrac{1 - (q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n+2}{4}} + a_1 (q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3) \dfrac{1 - (q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n-2}{4}} \\ \text{per } n \text{ multiplo di 4 meno 2.} \\ a_1 \dfrac{1 - (q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n+3}{4}} + a_1 (q_1 + q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3) \dfrac{1 - (q_1 q_2 q_3 q_4)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4}^{\frac{n-1}{1}} \\ \text{per } n \text{ multiplo di 4 meno 3.} \end{cases}$$

In tutti i quattro casi essendo per $k = \infty \; lim\,(q_1 q_2 q_3 q_4)^k = 0$ si ha per $n = \infty$:

$$lim \; S_n = \frac{a_1 (1 + q_1 + q_1 q_2 + q_1 q_2 q_3)}{1 - q_1 q_2 q_3 q_4} \qquad (14)$$

Abbiamo quindi:

La somma di n termini consecutivi di una progressione geometrica a quadrupla ragione tale che il modulo del prodotto delle ragioni è minore dell'unità, per n crescénte all'infinito ha per limite una frazione che ha per numeratore il primo termine moltiplicato la somma dell'unità, più la prima ragione, più il prodotto della prima per la seconda ragione, più il prodotto della prima per la seconda per la terza ragione e per denominatore l'unità meno il prodotto delle quattro ragioni.

7. — È interessante dare ora una rappresentazione grafica dei termini di una progressione geometrica a quattro ragioni quando si conoscono i primi cinque termini e quindi nello stesso tempo un metodo geometrico per determinare completamente la progressione.

Anzitutto è facile dimostrare il seguente:

Teorema. Fra i termini a_s, a_{s-1}, a_{s-4}, a_{s-5}, di una progressione geometrica a quattro ragioni esiste la seguente relazione:

Digitized by Google

$$a_s = a_{s-1} \frac{a_{s-4}}{a_{s-5}} \qquad (15)$$

Tralasciamo la dimostrazione semplicissima che il lettore può ricavare immediatamente sostituendo ad a_{s-1}, a_{s-4}, a_{s-5} i valori dati delle (1), (2), (3), (4), dopo aver fatto le quattro ipotesi circa il numero s.

Riferendoci ora a due assi cartesiani ortogonali converremo di prendere come ascisse gl'indici del rango dei termini e come ordinate i rispettivi termini della progressione.

Chiamiamo con $A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots A_n$ i punti rappresentativi. Per il teorema precedente abbiamo che considerato il termine a_s si ha:

$$a_s = a_{s-1} \frac{a_{s-4}}{a_{s-5}}$$

quindi un termine qualunque di posto s si ottiene per mezzo di operazioni analitiche sopra i termini precedenti.

Queste operazioni analitiche si effettuano in modo semplicissimo con le costruzioni grafiche seguenti.

Poichè conosciamo i primi cinque termini della progressione geometrica a quattro ragioni possiamo costruire con la convenzione stabilita i punti $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$ corrispondenti ai primi cinque termini $a_1\ a_2\ a_3\ a_4\ a_5$.

(A causa d'un incidente nella fototipia dobbiamo omettere la figura che doveva occupare questo spazio; ci riserviamo però di pubblicarla in foglio volante nel prossimo numero, così che possa essere qui applicata dai lettori stessi).

Proiettiamo perpendicolarmente A_5 in A'_1 sulla ordinata di A_1. Consideriamo l'affinità ortogonale definita dalla coppia $(A_1\ A'_1)$ dall'asse OX e troviamo i punti affini $A'_1\ A'_2\ A'_3\ A'_4\ A'_5$ dei punti $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$.

Digitized by Google

Proiettiamo ora A'_5 in A''_4 come precedentemente e consideriamo l'affinità definita dallo stesso asse OX e dalla coppia $(A_4\ A''_4)$ e troviamo i punti $A''_1\ A''_2\ A''_3\ A''_4\ A''_5$ affini dei punti $A_1\ A_2\ A_3\ A_4\ A_5$.

Proiettando A''_5 in A'''_4 e procedendo nello stesso modo si troveranno i punti $A'''_1\ A'''_2\ A'''_3\ A'''_4\ A'''_5$ e così di seguito.

Vogliamo ora dimostrare che le ordinate dei punti $A'_2\ A'_3\ A'_4\ A'_5\ A''_2\ A''_3\ A''_4\ A''_5$ sono corrispondentemente i termini $a_6\ a_7\ a_8\ a_9\ a_{10}\ a_{11}\ a_{12}\ a_{13}$ della progressione.

Infatti nell'affinità definita dell'asse OX e dalla coppia $(A_4\ A'_4)$ la caratteristica è costante ed è uguale ad

$$\frac{MA'_4}{MA_4} = \frac{a_5}{a_4}$$

Avremo perciò: $\frac{MA'_4}{MA_4} = \frac{NA'_2}{NA_2} = \frac{PA'_3}{PA_3} = \frac{QA'_4}{QA_4} = \frac{RA'_5}{RA_5} = \frac{a_5}{a_4}$.

Si ricava allora: $\frac{NA'_2}{a_2} = \frac{a_5}{a_4}$ quindi $NA'_2 = a_5 \frac{a_2}{a_4}$

per la [15] si ha $NA'_2 = a_6$. Considerando la relazione;

$\frac{NA'_2}{NA_2} = \frac{PA'_3}{PA_3} = \frac{a_6}{a_2}$ quindi $PA'_3 = a_6 \frac{a_3}{a_2}$ perciò $A'_3 = a_7$

Considerando l'altra ralazione:

$\frac{PA'_3}{PA_3} = \frac{QA'_4}{QA_4} = \frac{a_7}{a_3}$ si ha $QA'_4 = a_7 \frac{a_4}{a_3}$ perciò $QA'_4 = a_8$.

Da $\frac{QA'_4}{QA_4} = \frac{RA'_5}{RA_5} = \frac{a_8}{a_4}$ si ha $RA'_5 = a_8 \frac{a_5}{a_4}$ perciò $RA'_5 = a_9$.

Possiamo concludere che le ordinate dei punti $A'_1, A'_2, A'_3, A'_4, A'_5$ sono rispettivamente i termini $a_6\ a_7\ a_8\ a_9$ della progressione.

Gli stessi risultati si hanno per i punti $A''_2\ A''_3\ A''_4\ A''_5$. Infatti dalla [15] si ha:

$$\frac{a_8}{a_{8-1}} = \frac{a_{8-4}}{a_{8-5}} \qquad (16)$$

Nell'affinità definiti dell'asse OX e della coppia $(A_4\ A''_4)$ la cui caratteristica è

$$\frac{MA''_4}{MA_4} = \frac{a_9}{a_4} \text{ avremo}$$

$$\frac{MA''_4}{MA_4} = \frac{NA''_2}{NA_2} = \frac{PA''_3}{PA_3} = \frac{QA''_4}{QA_4} = \frac{RA''_5}{RA_5}$$

Digitized by Google

Dalla relazione:

$$\frac{a_9}{a_1} = \frac{NA''_2}{NA_2} \text{ si ha } NA''_2 = a_9 \frac{a_2}{a_1}.$$

Ma per la (16) si ha $\frac{a_2}{a_1} = \frac{a_6}{a_5}$ perciò si ha $NA''_2 = a_9 \frac{a_6}{a_5} = a_{10}$.

Da $\frac{a_{10}}{a_2} = \frac{PA''_3}{a_3}$ si ha $PA''_3 = a_{10} \frac{a_3}{a_2}$ ma $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_7}{a_6}$ quindi

$$PA''_3 = a_{10} \frac{a_7}{a_6} = a_{11}.$$

Nello stesso modo si dimostra che $QA''_4 = a_{12}$; $RA''_5 = a_{13}$.

Con la costruzione stabilita per determinare i punti A_6 A_7 A_8 A_9..... basta effettuare sopra i punti A'_2 A'_3 A'_4 A'_5 una traslazione parallela all'asse OX di quattro unità, sopra i pnnti A''_2 A''_3 A''_4 A''_5 di otto unità e così successivamente.

Catania, luglio 1925.

NOTE DIDATTICHE.

Una applicazione sulle coniche.

1. — La direttrice d di una *parabola* C divide la parte esterna del piano a cui appartiene la parabola in due regioni, una delle quali è un semipiano, che indicheremo con E_1; sia E_2 l'altra. Da un punto qualunque di detta parte esterna si possono condurre due tangenti alla parabola; fra i due angoli, supplementari, che esse formano sia α quello che comprende C nel suo interno; si suol dire che la parabola è veduta da quel punto sotto un angolo α.

È facile dimostrare che la direttrice è il luogo dei punti che vedono la parabola sotto un angolo retto. Di qui si deduce senz'altro che i punti della regione E_1 vedono la parabola sotto un angolo acuto, mentre i pnnti E_2 la vedono sotto un angolo ottuso. Il luogo dei punti che vedono la parabola C sotto un medesimo angolo α è un ramo di iperbole, di cui l'altro ramo è il luogo dei punti dai quali C è veduta sotto l'angolo supplementare.

2. — Per dimostrare l'asserto conviene riferirsi ad un sistema di assi cartesiani ortogonali OXY avente il vertice della parabola per origine O e il fuoco F sul semiasse positivo OX. Indicando

Digitized by Google

con l la lunghezza OF, l'equazione della parabola è, notoriamente, $y^2 = 4\,l\,x$; quella della direttrice è $x = -l$.

Siano x_0 ed y_0 le coordinate di un punto qualsiasi P del piano. L'equazione di una retta generica passante per P è

$$y = y_0 + m\,x - m\,x_0\,,$$

con m indicandosi la sua costante di direzione. Perchè tale retta sia tangente, l'equazione di secondo grado in x

$$y_0 + m\,x - m\,x_0)^2 = 4\,l\,x\,,$$

ossia

$$m^2\,x^2 - 2\,(m^2\,x_0 - m\,y_0 + 2\,l)\,x + (y_0^2 + m^2\,x_0^2 - 2\,m\,x_0\,y_0) = 0,$$

deve avere un'unica soluzione; cioè deve essere

$$(m^2\,x_0 - m\,y_0 + 2\,l)^2 = m^2\,(y_0^2 + m^2\,x_0^2 - 2\,m\,x_0\,y_0),$$

ossia

$$4\,l^2 + 4\,l\,m^2\,x_0 - 4\,l\,m\,y_0 = 0\,,$$

ossia infine

$$x_0\,m^2 - y_0\,m + l = 0.$$

Le costanti di direzione delle tangenti che si possono condurre da P alla parabola sono insomma

$$m = (y_0 \pm \sqrt{y_0^2 - 4\,l\,x_0}) : 2\,x_0\,.$$

Perchè la parabola sia veduta da P sotto un angolo retto, il prodotto di questi due valori di m deve essere -1, ossia deve essere $l : x_0 = -1$, ossia $x_0 = -l$; sicchè P deve appartenere alla direttrice.

Se P è esterno, ma non giace sulla direttrice, indicando con m_1 ed m_2 le costanti di direzione delle due tangenti e con φ l'angolo acuto formato da esse, si ha:

$$tg\,\varphi = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1\,m_2} \right| = \frac{\sqrt{y_0^2 - 4\,l\,x_0}}{|\,x_0 + l\,|}\,.$$

Perchè la parabola sia veduta da P sotto un dato angolo acuto φ o sotto l'angolo $\pi - \varphi$ deve dunque essere

$$y_0^2 - 4\,l\,x_0 = tg\,\varphi\,(x_0 + l)^2\,;$$

ossia P deve appartenere ad una conica, che, evidentemente, deve essere un'iperbole; e il nostro asserto resta così completamente provato.

Digitized by Google

*
* *

3. — Si consideri ora nel piano un'*ellisse* di equazione

$$(x : a)^2 + (y : b)^2 = 1.$$

Perchè una retta passante per P sia tangente all'ellisse la costante di direzione deve annullare il discriminante dell'equazione di secondo grado in x:

$$(x : a)^2 + ([y_0 + m x - m x_0] : b)^2 = 1,$$

ossia

$$(b^2 + a^2 m^2) x^2 + 2 a^2 m (y_0 - m x_0) x + \\ + a^2 (y_0^2 + m^2 x_0^2 - 2 m x_0 y_0 - b^2) = 0;$$

deve essere cioè soluzione dell'equazione:

$$a^4 m^2 (y_0 - m x_0)^2 = (b^2 + a^2 m^2) a^2 (y_0^2 + m^2 x_0^2 + 2 m_0 x_0 y_0 - b^2),$$

ossia $$b^2 (y_0^2 + m^2 x_0^2 - 2 m x_0 y_0 - b^2) - a^2 b^2 m^2 = 0,$$

ossia infine $$(x_0^2 - b^2) m^2 - 2 x_0 y_0 m + (y_0^2 - b^2) = 0.$$

Di qui intanto si vede che l'ellisse è veduto da P sotto un angolo retto solo quando il prodotto delle soluzioni di tale equazione è -1, cioè quando

$$x_0^2 - a^2 = b_0^2 - y_0^2,$$

ossia

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 + b^2.$$

L'ellisse è dunque veduta sotto un angolo retto solo dai punti della circonferenza C che ha lo stesso centro dell'ellisse ed ha il raggio eguale alla distanza fra due suoi vertici non opposti.

4. — I punti compresi fra l'ellisse e C vedono l'ellisse sotto un angolo ottuso; i punti esterni a C la vedono sotto un angolo acuto. Lungo una semiretta qualsiasi uscente da O tale angolo va indefinitamente diminuendo allontanandosi da O. I punti che vedono l'ellisse sotto un medesimo angolo α formano delle ovali aventi gli stessi assi di simmetria dell'ellisse; le due relative ad un dato angolo acuto φ ed al suo supplemento $\pi - \varphi$ costituiscono una curva di quarto ordine, di cui è facile trovare l'equazione.

Le soluzioni dell'equazione di secondo grado in m sono:

$$\{ x_0 y_0 \pm \sqrt{x_0^2 y_0^2 + (x_0^2 - a^2)(y_0^2 - b^2)} \} : (x^2 - a^2), \quad \text{ossia}$$

Digitized by Google

$$\left\{ x_0 y_0 \pm \sqrt{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2} \right\} : (x_0^2 - a^2) ;$$

onde si ha:

$$\left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \frac{2\sqrt{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2}}{|x_0^2 - a^2|} : \left| 1 + \frac{y_0^2 - b^2}{x_0^2 - a^2} \right| =$$

$$= 2\sqrt{b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 - a^2 b^2} : |x_0^2 + y_0^2 - a^2 - b^2| .$$

L'equazione del luogo dei punti che vedono l'ellisse sotto uno dei due angoli φ e $\pi - \varphi$ è dunque:

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2) \, tg^2 \varphi = 4 (b^2 x^2 + a^2 y^2 - a^2 b^2).$$

* * *

5. — Si consideri infine l'*iperbole* di equazione

$$(x : a)^2 - (y : b)^2 = 1.$$

Per avere le costanti di direzione delle tangenti che si possono condurre ad esse da P basta ripetere quanto si è detto per l'ellisse ponendo $(i\,b)$ invece di b; e si trova l'equazione

$$(x_0^2 - a^2) m^2 - 2 x_0 y_0 m + (y_0^2 + b^2) = 0 .$$

Perchè l'iperbole sia veduta da P sotto un angolo retto deve essere

$$x_0^2 - a^2 = - y_0^2 + b^2,$$

ossia

$$x_0^2 + y_0^2 = a^2 - b^2.$$

Non vi sono dunque tali punti se $a < b$; se $a = b$, ossia se l'iperbole è equilatera, essa è veduta sotto un angolo rette dai punti della circonferenza C di centro O e di raggio $\sqrt{a^2 - b^2}$, quando $a > b$.

Nel primo e nel secondo caso ($a \leq b$) l'iperbole non è mai veduta sotto un angolo acuto; quando $a > b$, essa è veduta sotto un tale angolo da tutti e soli i punti interni a C.

In ogni caso il luogo dei punti che vedono l'iperbole sotto un angolo acuto φ o sotto l'angolo $\pi - \varphi$ è la quartica di equazione

$$(x^2 + y^2 - a^2 + b^2) \, tg^2 \varphi = 4 (a^2 y^2 - b^2 x^2 + a^2 b^2),$$

simmetrica rispetto ad entrambi gli assi e che consta di due curve distinte (una interna, l'altra esterna a C) quando $a > b$.

Venezia, giugno 1926.

PAOLO CATTANEO.

Digitized by Google

Applicazioni sull'equazione pitagorica (*)

DI

ALESSANDRO COLA.

Ci proponiamo il seguente problema:

Ricercare le possibili terne di soluzioni, intere, contenenti tutte il termine 60 come cateto.

Posto $x = 60$, è dalle (α):

$$x = 2\sqrt{b\,c} = 60 \quad \text{da cui} \quad b\,c = 900 \qquad (27)$$

È $300 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$; il numero dei fattori di 900 è 27, che sono quelli sottosegnati

1.2.4.3.6.12.9.18.36.5.10.20.15.30.60.45.90.180.25.50.100.75.150.300.225.450.900.

Ricordiamo che il prodotto di ciascuna coppia di fattori equidistanti è costante e vale 900.

Giusta la (α), dovendo essere $b\,c = q^2$, tutte le terne che ammettono in comune il termine 60 sono in numero di $\frac{27-1}{2} + 1$, ossia $13 + 1$, delle quali 13 sono distinte e la 14ª è soluzione limite.

In generale detto $2m + 1$ il numero dei fattori di $b\,c = q^2$, il numero delle soluzioni è $m + 1$, delle quali una è soluzione limite.

Nel caso particolare in esame, siccome dalla (26) si ha:

$b\,c = q^2 = 900$

b — c	le possibili *terne intere sono*	x	y	z
900 — 1	. . . . .	60	899	901
450 — 2	. . . . .	60	448	452
225 — 4	. . . . .	60	221	229
300 — 3	. . . . .	60	297	303
150 — 6	. . . . .	60	144	156

(*) Questa *Nota* è a complemento dell'articolo: *Equazione Pitagorica* del medesimo A. pubblicato in *Rassegna* A. V, N 7 pag. 35 e A. VI, N. 1, pag. 1, N. 8-9, pag. 97.

Digitized by Google

75 — 12	60 —	63 —	87
100 — 9	60 —	91 —	109
50 — 18	60 —	32 —	68
25 — 36	60 —	11 —	61
180 — 5	60 —	175 —	185
90 — 10	60 —	80 —	100
45 — 20	60 —	25 —	65
60 — 15	60 —	45 —	75
30 — 30	60 —	0 —	60 soluz. limite.

Notiamo che 60 — 899 — 901 è la massima terna per essere massima la differenza dei corrispondenti fattori b, c; come anche la minima terna è 60 — 11 — 61, per essere minima la differenza dei corrispondenti valori di b, c.

Supponiamo ora che sia assegnato il cateto dispari giusta la (26) $x = 2m + 1 = 21$ p. e., e ricercansi le possibili soluzioni le quali ammettono tutte come cateto il valore assegnato 21.

Dato $x = 2m + 1 = 21$ è sempre

$x' = 2\sqrt{21^2}$ numero pari.

È $x' = 2\sqrt{441}$, dove è $b \cdot c = q^2 = 441$.

Le coppie di fattori equidistanti e che valgono 441 sono:

(1 . 441); (3 . 147); (9 . 49); (7 . 63); (21 . 21).

Da esse si ha rispettivamente:

		x'	z'	y'
$x' = 2\sqrt{1 \cdot 441}$	e quindi	42	442	440
$x' = 2\sqrt{3 \cdot 147}$	» »	42	150	144
$x' = 2\sqrt{9 \cdot 49}$	» »	42	58	40
$x' = 2\sqrt{7 \cdot 63}$	» »	42	70	56
$x' = 2\sqrt{21 \cdot 21}$	» »	42	42	0

Dividendo per 2 i valori x' z' y' si hanno gli altri

x	z	y	
21	221	220	
21	75	72	
21	29	20	
21	35	28	
21	21	0	*soluzione limite*

nelle quali soluzioni il valore di x è quello assegnato, ossia 21.

Digitized by Google

Completiamo il problema supponendo che sia dato il valore dell'ipotenusa z.

Cercansi i possibili cateti interi:

Dalla (α) è $z = a + b$ (1), mentre è $ab = q^2$ (2)

Dalla (2) consegue che il problema ammette soluzioni:

1°. se z, giusta le (α'), è la somma di due quadrati; se è cioè $z = m^2 + n^2$ (3), poichè il prodotto di due quadrati è sempre un quadrato.

In tal caso è $a = m^2$ e $b = n^2$; per cui è $z = a + b = m^2 + n^2$, mentre è $ab = m^2 n^2 = q^2$.

2°. Se z, giusta le (α''), è la somma di due quadrati moltiplicata per un numero p. e. k; se è, cioè, $z = (r^2 + s^2)k$; giacchè si ha $kr^2 + ks^2$, nel quale caso è $a = kr^2$ e $b = ks^2$; da cui è $z = kr^2 + ks^2$ (4) mentre è poi $ab = kr^2 \times ks^2 = k^2 r^2 s^2 = q^2$.

Soffermandoci alla (3), da essa deve essere z decomponibile nella somma di due quadrati.

Posto $z = 325$ si opera praticamente come segue;

È $18^2 = 325 - 1 = 324$.

Posto $a = 18^2$ e $b = 1^2$ è

$z = 325 = 18^2 + 1^2$, mentre è $ab = 18^2 \times 1^2 = 324$, ed una prima soluzione è:

$$z = a + b = 324 + 1 = 325$$
$$y = a - b = 324 - 1 = 323$$
$$x = 2\sqrt{ab} = 2\sqrt{324} = 2 \times 18 = 36.$$

Per vedere se 325 è decomponibile altrimenti nella somma di due quadrati, ricordando che la differenza dei quadrati di due numeri consecutivi vale il doppio del minore più uno, si ha la seguente legge pratica.

$\sqrt{325}$	18	17	16	15	14	13	. . . . .
825	*1*	*36*	69	*100*	129	156	
1							

Si nota che 18, 17, 16, 15, 14, 13 . . . . . sono le basi dei quadrati contenuti in 325.

Si nota che *1*, *36*, 69, *100*, 129, 156 . . . . . sono i relativi resti tra 325 ed il quadrato della corrispondente soprascritta base.

Notiamo che cognito il resto 1, cognita la base seguente 17, è cognito il resto 36 tra $325 - 17^2$, e ciò in considerazione di quanto avanti si è fatto notare.

Digitized by Google

E di fatti è:

$36 = 1 + (2 \times 17 + 1)$, essendo 1 resto precedente e cognito, ed anche 17 base consecutiva e cognita

$69 = 36 + (2 \times 16 + 1)$ » » »

$100 = 69 + (2 \times 15 + 1)$ » » »

ecc. ecc.

Adunque 325 è decomponibile nelle somme dei seguenti quadrati:

$$18^2 + 1^2 = 324 + 1$$
$$17^2 + 6^2 = 289 + 36$$
$$15^2 + 10^2 = 225 + 100$$

e rispettive soluzioni sono:

z	y	x	
325	323	36	1ª soluz.
325	253	204	2ª soluz.
325	125	300	3ª soluz.

Notisi che i resti 1, 36, 100 sono quadrati, e danno le tre soprascritte soluzioni con i quadrati delle singole basi 18, 17, 15. Nella esecuzione pratica ci siamo fermati al resto 156 per essere esso resto 156 maggiore del quadrato della susseguente base 12, e per vero è $156 > 144$.

Risalendo alla (4), z può essere uguale alla somma di due quadrati moltiplicata per k; può essere cioè:

$$z = k\,r^2 + k\,s^2 \qquad (5)$$

Ora posto nella (5) $r^2 = 1^2$; $r^2 = 2^2$; $r^2 = 3^2$; $r^2 = 4^2$; $z^2 = 5^2$..... successivamente si ha:

$$\left.\begin{array}{l} z = k \cdot 1^2 + k\,s^2 \\ z = k \cdot 2^2 + k\,s^2 \\ z = k \cdot 3^2 + k\,s^2 \\ z = k\,4^2 + k\,s^2 \\ z = k\,4^2 + k\,s^2 \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} (6)$$

da cui si ha;

$z - k \cdot 1^2 = k\,s^2$; $z - k \cdot 2^2 = k\,s^2$; $z - k \cdot 3^2 = k\,s^2$. . . . . (6);

Digitized by Google

e però se dividendo $z - k \cdot 1^2$; $z - k \cdot 2^2$; $z - k \cdot 3^2$ . . . per k si ha per quoziente un quadrato, genericamente s^2, si ottengono altrettanti soluzioni.

Notiamo intanto che essendo k fattore comune di ciascun binomio delle (δ), deve essere k fattore di z, e quindi può essere k uguale a qualsiasi fattore di s.

Per cui, come prima cosa, bisogna decomporre z nei suoi fattori primi.

Posto $z = 325$, notiamo che è $325 = 5^2 \times 13$, e che i fattori di 325 sono:

$$1 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 13 \cdot 65 \cdot 325$$

Supposto $k = 5$, praticamente dalla (6) si opera come segue:

$325 - 5 \times 1^2$, ossia

$$\begin{array}{r|l|l} 325 - & & \\ \quad 5 & & \\ \hline 320 & 5 & 1 \\ \quad 64 & & 64 \end{array}$$

Essendo $64 = 8^2$ si ha

$z = 325 = 5 \times 1^2 + 5 \times 8^2 = 5 + 320$, in cui $k = 5$;

$r = 1$; $s = 8$ danno la soluzione che si ricava da $a = 320$ e $b = 5$ ossia

z	y	x	
325	315	80	4ª soluzione.

Per vedere se $k = 5$ è possibilmente fattore comune di altri binomii delle (δ), poniamo $r = 2$, onde è $r^2 = 4$, da cui $k \cdot r^2 = 5 \times 4 = 20$. Ora da 325 si deve togliere 5×4 ossia 20, e poi dividere il resto 305 per 5, e si ha per quoziente 61.

Ora è $325 - 5 \times 4 = 325 - 5(1 + 3) = 325 - 5 \times 1 - 5 \times 3$, sicchè tanto vale togliere 5×4 da 325, quanto togliere 5×3 da $325 - 5 \times 1$, ossia da 320, resto già precedentemente trovato, come avanti, nella pratica esecuzione si vede.

Ma se 320, quale dividendo, si diminuisce di 3×5 (multiplo del divisore che è 5, per quanto avanti) il primitivo quoziente, ossia 64, diminuisce di tre unità, per cui si ha quale quoziente $64 - 3 = 61$, di già trovato.

Ed allora naturalmente si ha il 3 ed il 61 che si leggono nella legge pratica seguente di facile intuizione, mentre il sovrastante *1*

Digitized by Google

della stessa è dato dal moltiplicatore 1^2, ed il sottostante 64 è il precedente quoziente ripetuto.

$$\begin{array}{l} 325 - \\ \quad 5 = 5 \times 1^2 \\ \overline{320}\,|\,5 \end{array} \quad \begin{array}{|cc} 1 & 3 \\ \hline 64 & 61 \end{array}$$

Analogamente, continuando, posto successivamente $r = 3$, è $r^2 = 9$.

Posto sempre $k = 5$, se da 325 si deve togliere 5×9, ossia 45, si ha $325 - 45 = 280$, resto che diviso per 5 da per quoziente 56, Ora tanto vale togliere 5×9 da 325, quanto togliere 5×8 da 320.

Ma se il dividendo 320 si diminuisce di 5×8 (valore multiplo secondo 8 del divisore 5) il quoziente, ossia 64, diminuisce esso pure di 8, e si avrà per quoziente $64 - 8 = 56$, di già trovato.

Ma $8 = 3 + 5$, onde basta diminuire 64 prima di 8 e poi la differenza 61 diminuirla di 5 per ottenere 56.

Si spiegano così i valori sovrastanti e sottostanti della legge pratica $\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 5 & \ldots\ldots \\ \hline 64 & 61 & 56 & \ldots\ldots \end{array}$, ossia

$$\begin{array}{l} 325 - \\ \quad 5 \\ \overline{320}\,|\,5 \end{array} \quad \begin{array}{|ccccc} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ \hline 64 & 61 & 56 & 49 & 40 \end{array} \quad (7)$$

I valori sovrastanti formano la progressione naturale dei numeri dispari.

I valori sottostanti sono i quozienti rispettivi delle differenze ossia,

$325 - 5 \times 1^2$; $325 - 5 \times 2^2$; $325 - 5 \times 3^2$. . . . . divise per 5, che vale particolarmente k.

Notiamo che è:

$$\begin{aligned} 1^2 &= 1 \\ 2^2 &= 1 + 3 \\ 3^2 &= 1 + 3 + 5 \\ 4^2 &= 1 + 3 + 5 + 7 \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \\ &\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

onde la progressione dei numeri dispari sovrastanti.

Digitized by Google

La somma dei termini sovrastanti delle possibili progressioni limitate è data dalla seguenle legge; ed esse somme sono quadrati:

$$1+3=\left(\frac{3+1}{2}\right)^2=4$$

$$1+3+5=\left(\frac{5+1}{2}\right)^2=9$$

$$1+3+5+7=\left(\frac{7+1}{2}\right)^2=16$$

. . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Ci fermiamo nella esecuzione pratica quando la radice quadrata del numero sottostante è uguale ovvero supera di uno il numero che indica il posto del sovrastante corrispondente termine.

Avendo supposto $k=5$ si ha come da (7)

$$\begin{array}{lll} & a & b \\ z=5\times 1^2+5\times 8^2= & 5+320 & \\ z=5\times 4^2+5\times 7^2= & 80+245 & \end{array}$$

per cui le soluzioni

z	y	x	
325	315	80	4ª soluzione di già notata
325	*165*	*280*	5ª soluzione

Se supponiamo $k=25$, fattore di 325, per essere 25 un quadrato, deve riprodursi una soluzione data dall'ipotesi $z=m^2+n^2$.

Di fatti:

$$\begin{array}{r|l|ll} 325- & & & \\ \quad 25 & & & \\ \hline 300 & 25 & 1 & 3 \\ \quad 12 & & 12 & 9 \end{array}$$ da cui essendo $k=25$;

$r^2=\left(\frac{3+1}{2}\right)^2$: $s^2=3^2=9$ si ha $z=25\times 9+25\times 4$, ossia

$$\begin{array}{llllll} a & b & & z & z & x \\ z=225+100, & \text{che dà la soluzione} & 325 & 125 & 300 & 3^a \text{ soluz. ripet.} \end{array}$$

BIBLIOTECA NAZIONALE ... FIRENZE

Digitized by Google

Supposto $k = 13$, fattore di 325, si ha:

$$\begin{array}{r|l|ccc} 325 - & & & & \\ 13 & & & & \\ \hline 312 & 13 & 1 & 3 & 5 \\ 52 & & 24 & 21 & \mathit{16} \end{array}$$

da cui essendo $k = 13$; $s^2 = 16$; $r^2 = \left(\frac{5+1}{2}\right)^2 = 9$ si ha:

$z = 13 \times 16 + 13 + 9$, ossia $\overset{a}{208}$ $\overset{b}{117}$ che dà la soluzione

z	y	x	
325	91	312	6ª soluzione

Supposto $k = 65$, fattore di 325 si ha:

$$\begin{array}{r|l|c} 325 - & & \\ 65 & & \\ \hline 260 & 65 & 1 \\ 4 & & \mathit{4} \end{array}$$

È $k = 65$; $r^2 = 1$; $s^2 = 4$, onde è

$z = 65 \times 1 + 65 \times 4$, ossia $\overset{a}{260}$ $\overset{b}{65}$ che dà la soluzione

z	y	x	
325	195	260	7ª soluzione

Supposto $k = 1$, fattore di 365, si riproducono le prime tre soluzioni. Di fatti si ha:

$$\begin{array}{r|l|ccccccccccccc} 325 - & & & & & & & & & & & & & \\ 1 & & & & & & & & & & & & & \\ \hline 324 & 1 & 1 & 3 & 5 & 7 & 9 & 11 & 13 & 15 & 17 & 19 & 21 & 23 \\ 324 & & \mathit{324} & 321 & 316 & 309 & 300 & \mathit{289} & 276 & 261 & 244 & \mathit{225} & 204 & 181 \end{array}$$

Essendo $324 = 18^2$; $289 = 17^2$; $225 = 15^2$, mentre è $k = 1$, è poi rispettivamente:

$r^2 = 18^2 = 324$; e $s^2 = 1^2 = 1$; come anche
$r^2 = 17^2 = 289$; e $s^2 = 6^2 = 36$; come anche
$r^2 = 15^2 = 225$; e $s^2 = 10^2 = 100$

per cui rispettivamente è

Digitized by Google

$$\begin{array}{lll} & a & b \\ z = 1 \times 324 + 1 \times & 1 = 324 + & 1 \\ z = 1 \times 289 + 1 \times & 36 = 289 + & 36 \\ z = 1 \times 225 + 1 \times & 100 = 225 + & 100 \end{array}$$

da cui le soluzioni:

z	y	x	
325	323	36	1ª soluzione ripetuta
235	253	204	2ª soluzione ripetuta
325	125	300	3ª soluzione ripetuta

Infine supposto $k = 325$, si ha, come è noto, una soluzione limite.

Per vero è

$$\begin{array}{r|l|l} 325 - & & \\ 325 & & \\ \hline 0 & 325 & 1 \\ \hline & 0 & 0 \end{array}$$

ed essendo $k = 325$; $r^2 = 1$; $s^2 = 0$ si ha:

$$\begin{array}{lll} & a & b \\ z = 325 \times 1 + 325 \times 0 = & 325 + & 0 \end{array}$$

da cui la soluzione limite:

z	y	x	
325	325	0	soluzione limite.

Avellino, 8 aprile 1926.

ALESSANDRO COLA.
R. Istituto Tecnico.

Osservazione sulla costruzione di una equazione di 2° grado

Nell'articolo «*Su una costruzione di una equazione di 2° grado*» del sig. A. CIANFLONE, pubblicato nel fascicolo N. 8-9 pag. 112 di questa *Rassegna*, si suppone, senza dirlo, che sia

$$\alpha = (-p + \sqrt{\Delta}) : 2 \qquad \text{e} \qquad \beta = (-p - \sqrt{\Delta}) : 2 \tag{1}$$

l'equazione trovata può ridursi ovviamente alla forma seguente:

$$x^2 + \left(\frac{\lambda + \mu}{2} p - \frac{\lambda - \mu}{2} \sqrt{\Delta} \right) x + \lambda \mu q = 2 . \tag{2}$$

Digitized by Google

Se, indicando sempre con α e β le soluzioni dell'equazione $x^2 + px + q = 0$, si pone invece

$$\alpha = (-p - \sqrt{\Delta}) : 2 \quad \text{e} \quad \beta = (-p + \sqrt{\Delta}) : 2 \qquad (3),$$

l'equazione che ha per soluzioni $\lambda\alpha$ e $\mu\beta$ è, evidentemente:

$$x^2 + \left(\frac{\lambda+\mu}{2} p + \frac{\lambda-\mu}{2} \sqrt{\Delta}\right) x + \lambda\mu q = 0 \qquad (4).$$

Basta osservare che si ha:

$$-\lambda\alpha - \mu\beta = \frac{\lambda+\mu}{2} p + \frac{\lambda-\mu}{2} \sqrt{\Delta} \quad \text{e} \quad \lambda\alpha \cdot \mu\beta = \lambda\mu q .$$

La (2) e la (4) coincidono non solo quando $\lambda = \mu$; ma anche quando $\alpha = \beta$ e quindi $\Delta = 0$.

PAOLO CATTANEO

La *Direzione* della *Rassegna* ringrazia vivamente i chiarissimi collaboratori e associati, che con somma cortesia vollero aumentare la quota d'associazione per l'anno 1927 a titolo sostenitore, accompagnando l'atto con espressioni di stima e d'augurio alla rivista:

Prof. **Cappelloni Arnaldo** di Milano.

» **Cavallaro Vincenzo G.** di Cefalù.

» **Cola Alessandro** di Avellino.

» **Vici Giulio** di Milano.

Direzione ed Amministrazione: Istituto G. Ferraris — Roma.
Direttore responsabile: Prof. Enrico Gradara.

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore - *Città di Castello* - 1927.

Digitized by Google

Rassegna di Matematica e Fisica

ANNO I — (1920-1921):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. 30
ANNO II — (1921-1922):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. 50
(*sono disponibili pochi esemplari*)
ANNO III — (1922-1923):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. 30
ANNO IV — (1923-1924):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. 30
Un fascicolo separato. . . . . L. 4
ANNO V — (1924-1925);
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . . L. 30
Un fascicolo separato . . . . . L. 4

Agli abbonati, librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento.

Inviare cartolina vaglia al **Prof. MARCELLO PUMA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris,*** Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

ARCHIMEDE

IL METODO

Quest'opera di *Archimede*, l'ultima scoperta, tradotta per la prima volta in italiano è corredata di numerose note esplicative, critiche, storiche e di citazioni, da una prefazione e da una tavola delle figure.

Indice della prefazione. 1° Ragione della traduzione. 2° Le opere di Archimede. 3° La scoperta del *Metodo.* 4° Il contenuto del *Metodo.* 5° Le traduzioni del *Metodo.*

Indice del Metodo: Introduzione. Lemmi. 1° Area del segmento di parabola. 2° Volume della sfera. 3° Volume dell'ellissoide. 4° Volume del segmento di paraboloide. 5° Centro di gravità del segmento di paraboloide. 6° Centro di gravità dell'emisfero. 7° Volume del segmento di sfera. 8° Volume del segmento di ellissoide. 9° Centro di gravità del segmento di sfera. 10° Centro di gravità del segmento di ellissoide. 11° Volume e centro di gravità del segmento di iperboloide. 12° Volume di un particolare segmento di cilindro P. I 13° *Id. id.* P. II. 14° *Id. id.* Dimostrazione con la parabola ausiliaria 15° *Id. id.* Dimostrazione geometrica.

Inviare cartolina vaglia di **L. 6** al **Prof. ENRICO GRADARA** — *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris***, Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Digitized by Google

ANNO VII

(1297)

DELLA

Rassegna di Matematica e Fisica

Abbonamento all'anno VII: Italia L. 20 - Estero L. 25

Un numero separato dell'anno VII: Italia L. 3 - Estero L. 3,50

ai librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento

inviare cartolina vaglia al

Prof. MARCELLO PUMA

Istituto G. Ferraris - Piazza di Spagna, 35 - Roma (6)

---

*A coloro che ci invieranno in una sola volta l'importo di 5 nuovi abbonamenti si concederà l'***abbonamento gratuito.**

La corrispondenza con la Rassegna deve essere inviata all'indirizzo:

Direzione della Rassegna - Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna 35 - Roma (6)

N.B. *Per avere pronta risposta occorre inviarne l'affrancatura in francobolli.*

VITA NUOVA

ABBONAMENTO ANNUO L. 2

Dirigere vaglia

ISTITUTO "G. FERRARIS"

Piazza di Spagna 35 - ROMA (6)

Digitized by Google

324 c
11.646

Anno VII - N. 3-4 Marzo-Aprile 1927

RASSEGNA

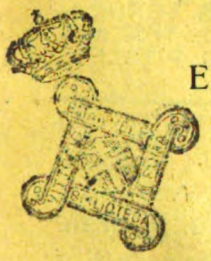
DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA



BIBLIOTECA NAZIONALE V.E. ROMA
16 MAG 1927
RIVISTE

SOMMARIO

VINCENZO G. CAVALLARO: La trigonometria su una distribuzione triangolare legata a sei punti equifattoriali.

DOMENICO GALLO: Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione.

LUIGI CONTE: Progressioni aritmetiche a doppia ragione.

Note didattiche — Densità e peso specifico (UGO FORNARI) — Sulla sezione aurea di un segmento (GIULIO VICI).

ABBONAMENTO ANNUO:

ITALIA. . . L. 20 — ESTERO. . . L. 25

Inviare l'importo all'Amministrazione

Piazza di Spagna, 35 ROMA (6)

ROMA

—

Direzione e Amministrazione:

Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

COLLABORATORI

E. ALLARA — A. ANTONELLI — G. APRILE — E. ARTOM — P. BARTOLI — P. BENEDETTI — G. BEMPORAD — A. BERNINI — A. BARTORELLI — F. BERIO — U. BINI — U. CASSINA — P. CATTANEO — G. V. CAVALLARO — E. CAVALLI — F. CHIAPPETTI — C. CIAMBERLINI — A. CIANFLONE — U. CRUDELI — A. COLA — S. COMPOSTO — L. CONTE — M. DEL GIUDICE — L. DELLA CASA — G. DELITALA — G. DE STEFANO — L. DI LAZZARO — S. ENA — G. FAVARO — M. FRAILIK — O. FRANCESCHI — M. FRITZSCHE — A. FONTANA — R. GALLONI — A. GANDINI — A. GASPARINI — F. GIUDICE — V. GRADARA ENA — U. GRASSI — G. LACCA — P. LANZAVECCHIA — R. LEONARDI — M. LEONCINI — V. MARSEGUERRA — E. MACCAFERRI — A. MARENGONI — M. MIGLIO — G. MIRTO — M. MIRTO — U. MONETTI — A. NATUCCI — A. NEPPI — A. PADOA — P. PANICHI — G. PEANO — N. PELLEGRINI — P. PENNA — R. PISCEL — G. QUAGLIA — N. RICCI CARTOM — F. RIMONDINI — G. SABINI — U. SALINI — A. SALMOIRAGHI — A. SCALA — P. SCATIZZI — A. SCHOR — F. SIBIRANI — N. SIRACUSANO — G. SPINA — D. SPANO — L. TENCA — S. TOSCANO — G. VICI — E. VIGLEZIO — L. VINGIANI — G. VITALI.

AVVERTENZA AI COLLABORATORI

La Rassegna *dedicherà uno dei fascicoli della presente annata alla commemorazione di* **Alessandro Volta**; *tutti i collaboratori che desiderano partecipare ad essa con scritti sulla vita e sull'opera dell'inventore della pila sono pregati di inviare gli articoli prima del 15 maggio.*

Rassegna di Matematica e Fisica

ANNO I — (1920-1921):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. **30**
ANNO II — (1921-1922):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. **50**
(*sono disponibili pochi esemplari*)
ANNO III — (1922-1923):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. **30**
ANNO IV — (1923-1924):
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . L. **30**
Un fascicolo separato. . . . . L. **4**
ANNO V — (1924-1925);
Il volume di 12 fascicoli con frontespizio e indici . . . L. **30**
Un fascicolo separato . . . . . L. **4**

Agli abbonati, librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento.

Inviare cartolina vaglia al **Prof. MARCELLO PUMA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris,*** Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Digitized by Google

La Trigonometria su una distribuzione triangolare legata a sei punti equifattoriali

DI

VINCENZO G. CAVALLARO.

Ogni studioso comprenderà di leggieri che presenta davvero non lieve difficoltà il compito di scrivere intorno al triangolo con l'obbietto di riuscire sufficientemente originale non già soltanto rispetto ai particolari, bensì anche rispetto all'insieme del lavoro. Nondimeno considerandolo dal punto di vista trigonometrico su una distribuzione triangolare legata a sei punti equifattoriali, noi crediamo di aver soddisfatto a quel legittimo desiderio di ogni ricercatore. Vedrà tosto lo studioso come il presente lavoro sia molto istruttivo, desti un senso profondo di godimento intellettuale e come il suo contenuto scientifico non sia scevro d'una certa importanza. La quale non sta già, certo, nella quasi materiale maniera onde determinare formule trigonometriche relative al triangolo fondamentale, bensì, invece, nella intrinseca natura geometrica della configurazione esaminata, che permette di stabilire agevolmente serie di codeste formule generali, di eccezionale eleganza, e che ricevono poi in triangoli costruiti con speciali leggi le loro importanti interpretazioni geometriche.

Ragionando su un triangolo acutangolo e all'interno del suo contorno, riporteremo dal nostro lavoro *Fattoriale del triangolo e dei poligoni* (*Period. di Matem.* A. VI, fasc. V, 1926, Zanichelli, Bologna) quanto è appena necessario per intendere qui il significato del termine « *Fattoriale* ».

§ I. - Generalità e considerazioni geometriche su 6 punti equifattoriali.

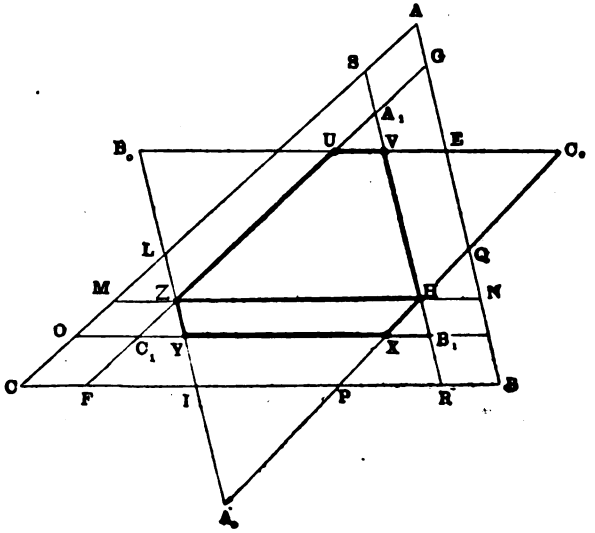
1. — Se da un punto *qualunque* H tiriamo le corde MN, PQ, RS rispettivamente parallele ai lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ di un tr. fond. ABC, di cui indichiamo con α, β, γ, gli angoli in A, B, C,

Digitized by Google

dimostrammo facilmente (*loc. cit.*) che, ove siano x, y, z rispettivamente le distanze del punto H dai lati a, b, c, è:

$$HM \cdot HQ \cdot HR = HN \cdot HP \cdot HS = x\,y\,z \operatorname{cosec}\alpha \operatorname{cosec}\beta \operatorname{cosec}\gamma = \Sigma(H) \quad (a)$$

Il numero $\Sigma(H)$ lo chiamammo *fattoriale del punto* H *rispetto al tr.* ABC.



La (a) mostra che il luogo dei punti che hanno ugual fattoriale o, come più brevemente diciamo, il luogo dei punti *equifattoriali*, coincide col luogo dei punti pei quali è costante il prodotto delle loro distanze dai lati del tr. fond. (punti equiprodotti normali). Dimostrammo altresì che in due punti H, Z, giacenti su una corda MN parallela ad un lato, ad esempio BC, del tr. fond. ed equidistanti dagli estremi, si ha $\Sigma(H) = \Sigma(z)$ e da questo teorema deducemmo la costruzione onde determinare quanti si vogliano gruppi di 6 punti equifattoriali. La figura d'illustrazione indica codesta costruzione: H, X sono due punti di una corda PQ, parallela al lato AC, ed equidistanti dagli estremi. Da X tiriamo la corda PO parallela a BC e prendiamo su di essa il punto Y tale che sia $OY = PX$ onde il fattoriale prenda in ciascun punto X, Y lo stesso valore. Da Y tiriamo la corda IL parallela al lato BA e prendiamo su di essa $LZ = IY$, da Z la corda FG parallela al lato CA sulla quale prendiamo $GU = FZ$ e finalmente da U tiriamo la corda DE parallela al lato CB sulla quale prendiamo il punto V per cui sia $EV = DU$: È facile dimostrare che per V passa la pa-

Digitized by Google

rallela RS condotta dal punto H al lato BA e che RH = SV. Avremo dunque

$$\Sigma(H) = \Sigma(X) = \Sigma(Y) = \Sigma(Z) = \Sigma(U) = \Sigma(V) \qquad (b)$$

Nella figura geometrica che siamo venuti costruendo col processo dianzi dichiarato, risultano le seguenti uguaglianze triangolari ADE = BPQ = CIL; SDV = GEU = PQX = RPH = FIZ = OLY. E poi, se diciamo A_1, B_1, C_1 i punti d'incontro dei lati non paralleli XY, ZU, VH dell'*esagono equifattoriale* HXYZUV, sarà altresì tr. $A_1UV = B_1HX = C_1YZ$ mentre $\Sigma(A_1) = \Sigma(B_1) = \Sigma(C_1)$, poichè i vertici A_1, B_1, C_1 del *tr. equifattoriale* $A_1B_1C_1$ giacciono due a due rispettivamente su corde parallele ai lati del tr. fond. e sono equidistanti dagli estremi di esse. Tutti questi triangoli sono simili al fond. ABC, alla guisa istessa che sono simili al fond. i tr. AMN, BPQ, CRS, i cui lati opposti ai vertici A, B, C passano per il punto H e sono rispettivamente paralleli ai lati del fondamentale.

Riconosciamo subito che il perimetro del tr. $A_1UV = B_1HX = C_1ZY$ è uguale alla somma UV + HZ + ZY relativa a tre lati non consecutivi dell'esagono equifattoriale. E se prolunghiamo codesti tre lati non consecutivi, otteniamo il tr. $A_0B_0C_0$ mentre sarà tr. $A_0XY = B_0ZU = C_0VH$. Il perimetro di ciascuno di questi ultimi triangoli è uguale alla somma XY + ZU + VH relativa ai tre rimanenti lati non paralleli dell'esagono equifattoriale. Dunque il perimetro dell'esagono HXYZUV è uguale alla somma dei perimetri della coppia dei triangoli A_1UV, C_0HV.

Ora se H è un punto speciale, notevole, del piano del tr. possiamo acconciamente calcolare gli elementi cardinali di tutti questi triangoli; ma le formule corrispondenti non sono generalmente semplici ed eleganti e degne quindi di speciale menzione così come accade rispetto ad un caso di singolare importanza in cui il punto qualunque H sia ora proprio l'*ortocentro* del tr. fond. E noi, nell'intenderci con codesto caso, penseremo il punto H della figura d'illustrazione non già più come un qualunque punto, come fino adesso ci si è presentato, bensì invece come l'ortocentro del tr. fond. Allora, in corrispondenza a tal fatto, sarà bene fissare acconcie denominazioni che sono d'altronde quasi imprescindibili per semplicizzare il linguaggio. Diremo perciò HXYZUV *esagono equifattoriale ortocentrico* e $A_1B_1C_1$ *triangolo equifattoriale ortocentrico*. I tr. uguali A_1UV, B_1HX, C_1YZ sono *associati interni* all'equifattoriale ort.

Digitized by Google

$A_1B_1C_1$ e i tr. uguali A_0XY, B_0ZU, C_0HV sono gli *associati esterni* allo stesso tr. equifattoriale.

I tr. associati interni A_1UV, B_1HX, C_1YZ sono tali che il fattoriale Σ è costante in 6 vertici (H, X, Y, Z, U, V) e altresì costante nei rimanenti 3 vertici (A_1, B_1, C_1).

I tr. AMN, BPQ, CRS i cui lati opposti ai vertici A, B, C, passano per l'ortocentro H del fond. e sono rispett. paralleli ai lati del fond. stesso li diremo *tr. paralleloortici* (*tr. prl.-ort.*) di primo ordine rispetto al fond. ABC. Essi *corrispondono* ai vertici A, B, C o agli angoli α, β, γ del fond. rispettivamente.

In seguito introdurremo acconcie altre denominazioni al solo scopo — come dicevamo — di semplicizzare il linguaggio.

§ II. - Triangoli prl-ortici d'ordine m ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

2. — Cominciamo col determinare le formule relative ai tr. prl-ort. di prim'ordine rispetto al fond. ABC: AMN, BPQ, CRS. Premesso, com'è noto, che (R = raggio circoncerchio di ABC, H_a, H_b, H_c piedi delle altezze)

$$AH = 2R\cos\alpha \qquad BH = 2R\cos\beta \qquad CH = 2R\cos\gamma$$
$$HH_a = 2R\cos\beta\cos\gamma \qquad HH_b = 2R\cos\gamma\cos\alpha \qquad HH_c = 2R\cos\alpha\cos\beta \quad (c)$$

Avremo $\frac{HN}{BH_a} = \frac{AH}{AH_a} = \frac{2R\cos\alpha}{c\,sen\,\beta}$ e poichè $BH_a = c\cos\beta$, $2R = \frac{a}{sen\,\alpha}$ verrà infine $HN = a\,cotg\,\alpha\,cotg\,\beta$. Analogamente troviamo $HM = a\,cotg\,\alpha\,cotg\,\gamma$. Dunque $MN = HM + HN = a\,cotg\,\alpha\,(cotg\,\beta + cotg\,\gamma)$. È poi immediato il calcolo dei rimanenti lati AM, AN del tr. AMN, poichè codesto tr. è simile al fond. ABC. Talchè, estendendo conformemente il procedimento già fatto pel tr. ANM, rispetto ai due rimanenti tr. prl-ortici BPQ, CRS, avremo:

$$MN = a\,cotg\,\alpha\,(cotg\,\beta + cotg\,\gamma) \qquad QP = b\,cotg\,\beta\,(cotg\,\gamma + cotg\,\alpha)$$
$$AM = b\,cotg\,\alpha\,(cotg\,\beta + cotg\,\gamma) \qquad BQ = c\ \ldots\ldots\ldots$$
$$AN = c\ \ldots\ldots\ldots \qquad BP = a\ \ldots\ldots\ldots$$

[I]

$$RS = c\,cotg\,\gamma\,(cotg\,\alpha + cotg\,\beta)$$
$$CR = a\ \ldots\ldots\ldots$$
$$CS = b\ \ldots\ldots\ldots$$

Oss.: Evidentemente moltiplicando l'area Δ del tr. fond. pel quadrato della parte trigonometrica $cotg\,\alpha\,(cotg\,\beta + cotg\,\gamma)$, ecc. avremo le formule areolari corrispondenti a quei triangoli. Onde

Digitized by Google

noi, in seguito, non scriveremo esplicitamente formule areolari poichè immediatamente deducibili da quelle laterali.

Oss.: Poichè i tr. ANM, BPQ, CRS *corrispondono* agli angoli α, β, γ del fond. le (I) mostrano *corrispondentemente* la legge formale dei loro lati.

Oss.: Il fattoriale Σ nei vertici dell'esagono equifattoriale ortocentrico HXYZUV ha il valore [vedi (a), (b), (c)] $\Sigma(H) = \Sigma(X) =$

$$= \Sigma(Y) = \Sigma(Z) = \Sigma(U) = \Sigma(V) = 8R^3 \frac{\cos^2\alpha \cos^2\beta \cos^2\gamma}{\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta \operatorname{sen}\gamma} =$$

$$= 8R^3 \operatorname{cotg}\alpha \operatorname{cotg}\beta \operatorname{cotg}\gamma \cos\alpha \cos\beta \cos\gamma.$$

3. — Rispetto a ciascun triangolo prl-ortico di primo ordine già considerato al n. 2, costruiamo la propria terna di tr. prl-ortici di primo ordine; avremo 9 tr. prl-ortici che noi diciamo di secondo ordine rispetto al fond. ABC. Così continueremo conformemente. Di tutti questi tr. quelli che hanno un vertice comune col fond. ABC li diciamo *tr. prl-ortici principali d'ordine* m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) e i rimanenti li diciamo *secondari* a qualunque diramazione essi appartengano.

Un tr. fond. possiede dunque 3 tr. prl-ort principali d'ordine m ($m = 1, 2, 3, \ldots$): Sieno AM_mN_m, BP_mQ_m, CR_mS_m, i simboli rappresentativi corrispondenti. E i tr. AM_mN_m, ad esempio, hanno un vertice comune A e i lati opposti a questo vortice sono corde, parallele al lato BC, la cui lunghezza tende a diminuire al crescere dell'indice m rappresentante l'ordine.

Dall'analisi delle formule laterali (I), relative ai tr. prl-ortici principali di prim'ordine ($m = 1$) vien fatto subito d'intendere la legge formale delle espressioni laterali dei tr. prl-ortici d'ordine m ($m = 1, 2, 3, \ldots$) Avremo, ad esempio, le relazioni ricorrenti $M_2N_2 = MN \operatorname{cotg}\alpha(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma)$, $M_3N_3 = M_2N_2 \operatorname{cotg}\alpha(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma)$ ecc. onde sarà facile comprendere i seguenti quadri ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

$M_mN_m = a \operatorname{cotg}^m\alpha(\operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma)^m$ $\quad Q_mP_m = b \operatorname{cotg}^m\beta(\operatorname{cotg}\gamma + \operatorname{cotg}\alpha)^m$

A $M_m = b$ . . . . . B $Q_m = c$ . . . . . .

A $N_m = c$ . . . . . B $P_m = a$ . . . . . .

[II]

$$R_mS_m = c \operatorname{cotg}^m\gamma(\operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta)^m$$

C $R_m = a$ . . . . . .

C $S_m = b$ . . . . . .

4. — Quanto alle formule laterali dei tr. prl. ortici secondari noi possiamo sempre scriverle senza difficoltà di sorta nei singoli

Digitized by Google

casi ben determinati che eventualmente si presentassero. Intanto premettiamo il

Teor.: Le formule più generali dei lati ξ, η, ζ *di un tr. prl-ortico d'ordine* λ *rispetto al fond.* ABC *son rappresentate dall'espressioni*

$$\xi = a\, cotg^m \alpha\, cotg^n \beta\, cotg^p \gamma\, (cotg\, \beta + cotg\, \gamma)^m\, (cotg\, \gamma + cotg\, \alpha)^n\, (cotg\, \alpha + cotg\, \beta)^p$$

[III] $\eta = b$ . . . . . .

$\zeta = c$ . . . . . .

nelle quali m, n, p *sono* 3 *numeri interi qualunque* (*in particolare uguali e non simultaneamente nulli*) *tali che* $m + n + p = \lambda$.

Oss.: Ove due numeri della terna (m, n, p) *sono nulli le* [III] *si riducono alle* [II] *relative ai tr. prl-ortici principali. In ogni altro caso le* [III] *corrispondono alle formule laterali di tr. prl-ortici secondari d'ordine* λ *rispetto al fond.* ABC.

Illustriamo il teorema con qualche esempio: Fissata una terna numerica m, n, p tale che $m + n + p = \lambda$, possiamo costruire il tr. prl. ortico d'ordine λ, rispetto al fond. ABC, i cui lati sono misurati dalle relazioni (III). Ed ecco come: Costruiamo, ad esempio, il tr. prl. ortico principale d'ordine m, $AM_m N_m$. I suoi lati son dati dal primo gruppo delle (II). Poi corrispondentemente al suo vertice N_m, d'angolo β, costruiamo il tr. prl-ortico principale d'ordine n rispetto al tr. $AM_m N_m$ (è però d'ordine $m + n$ rispetto ad ABC). Sia $N_m \varphi \psi$ questo triangolo. Le formule laterali del tr. $N_m \varphi \psi$ (che rispetto ad ABC è *secondario)* si ottengono moltiplicando quelle del tr. $AM_m N_m$ per $cotg^n \beta\, (cotg\, \gamma + cotg\, \alpha)^n$. Se rispetto al tr. $N_m \varphi \psi$ costruiamo il tr. prl-ortico principale d'ordine p (d'ordine $m + n + p$ rispetto ad ABC) in corrispondenza dell'angolo γ del tr. $N_m \varphi \psi$, le espressioni dei lati del tr. così costruito si ottengono moltiplicando quelle del tr. $N_m \varphi \psi$ per $cotg^p \gamma\, (cotg\, \alpha + cotg\, \beta)^p$ e allora saranno rappresentate dalle formule del gruppo [III] dianzi dichiarato.

§ III. - Triangoli prl-ortici convertici d'ordine m ($m = 1, 2, 3 \ldots$).

5. — Nel § II abbiamo considerato i tr. AMN, BPQ, CRS le cui basi MN, PQ, RS sono riguardabili come somma dei due segmenti in cui l'ortocentro H divide ciascun segmento base passante per esso parallelo ad un certo lato del fond. ABC. In questo § III consideriamo i tr. HA_1Z, HB_1X, HC_0V, che noi diciamo *prl-*

Digitized by Google

ortici convertici (l'ortocentro H è un vertice ad essi comune), i quali hanno i lati HZ, HX, HV, passanti per l'ortocentro e giacenti rispett. su corde parallele ai lati del fond ABC, differenza dei due segmenti in cui l'ortocentro medesimo divide codeste corde parallele passanti per esso.

Questi tr. prl-ortici convertici possiedono la proprietà che il fattoriale prende lo stesso valore agli estremi di un conveniente lato ed è uguale per tutti i triangoli. Avremo cioè, (Vedi *oss.* n. 2).

$$\Sigma(H) = \Sigma(Z) = f;\ \Sigma(H) = \Sigma(X) = f;\ \Sigma(H) = \Sigma(V) = f.$$

$$f = 8R^3\ cotg\,\alpha\ cotg\,\beta\ cotg\,\gamma\ cos\,\alpha\ cos\,\beta\ cos\,\gamma.$$

Oss.: Noi diciamo, ad esempio, che il tr. prl-ortocentrico convertice HA_1Z *corrisponde* all'angolo $A = \alpha$ pel fatto che il suo lato HZ passante per l'ortocentro H è parallelo al lato BC che è opposto all'angolo α. In tal guisa i tr. prl-ortici convertici HB_1X, HC_0V corrispondono agli angoli β, γ del fond. ABC, rispettivamente.

Essendo $HN = ZM$ è $HZ = HM - HN$ e quindi (n. 2)

$$HZ = a\ cotg\,\alpha\,(cotg\,\gamma - cotg\,\beta).$$

Dopo ciò è immediato calcolare i rimanenti lati A_1Z, A_1H del tr. HA_1Z a causa della sua simiglianza col fond. ABC. Talchè, estendendo inalterato il procedimento già fatto pel tr. HA_1Z, rispetto ai due rimanenti tr. prl-ortici convertici HB_1X, HC_0V, avremo i seguenti gruppi di formule laterali:

$$HZ = a\ cotg\,\alpha\,(cotg\,\gamma - cotg\,\beta) \qquad HX = b\ cotg\,\beta\,(cotg\,\gamma - cotg\,\alpha)$$
$$A_1Z = b\ \ldots\ldots\ldots \qquad B_1H = c\ \ldots\ldots\ldots$$
$$A_1H = c\ \ldots\ldots\ldots \qquad B_1X = a\ \ldots\ldots\ldots$$

[IV]
$$HV = c\ cotg\,\gamma\,(cotg\,\alpha - cotg\,\beta)$$
$$C_0V = a\ \ldots\ldots\ldots$$
$$C_0H = b\ \ldots\ldots\ldots$$

6. — *Oss.:* Osserviamo che il tr. prl-ortico convertice HB_1X è uno dei 3 tr. uguali HB_1X, A_1UV, C_1YZ che nel § I abbiamo chiamato *associati interni* al tr. equifattoriale $A_1B_1C_1$, e così il tr. prl-ortico convertice HC_0V è uno dei 3 tr. uguali HC_0V, A_0XY, B_0ZU che allo stesso § I abbiamo chiamato *associati esterni* al tr. equifattoriale $A_1B_1C_1$. E poichè — come dicevamo al n. 1 — il perimetro dell'esagono equifattoriale HXYZUV è uguale alla somma dei perimetri di 2 tr. associati, interno ed esterno, così quel perimetro è uguale alla somma dei perimetri dei 2 tr. prl-ortici convertici HB_1X, HC_0V.

Digitized by Google

Onde, sommando le formule dei due ultimi gruppi [IV] che ad essi sono relativi, otterremo il perimetro dell'esagono equifattoriale. Ora, se eseguiamo codesta somma, avremo per risultato la somma delle formule del primo gruppo [IV] che è relativa al perimetro del tr. prl-ortico convertice HA_1Z e perciò possiamo dire — com'è anche dimostrabile subito geometricamente — che il perimetro del tr. prl-ortico convertice HA_1Z è uguale alla somma dei perimetri dei due rimanenti tr. prl-ortici convertici HB_1X, HC_0V e quindi anche al *perimetro dell'esagono equifattoriale* HXYZUV, *che pertanto vien dato dalla somma delle formule del primo gruppo delle* [IV].

7. — *Espressioni laterali del tr. equifattoriale* $A_1B_1C_1$ *e del suo associato* $A_0B_0C_0$.

Avremo, ad esempio, $A_1B_1 = HV + 2\,B_1H$; $B_0C_0 = 2C_0V + B_1X$. Sostituendo i valori [IV] verrà, dopo qualche lieve trasformazione e riduzione

$$
\begin{aligned}
&B_1C_1 = a\,[cotg\,\gamma\,(cotg\,\alpha + cotg\,\beta) - 2\,cotg\,\alpha\,cotg\,\beta]\\
&C_1A_1 = b\,[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
(0)\qquad &A_1B_1 = c\,[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&B_0C_0 = a\,[2\,cotg\,\gamma\,cotg\,\alpha - cotg\,\beta\,(cotg\,\gamma + cotg\,\alpha)]\\
&C_0A_0 = b\,[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&A_0B_0 = c\,[\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}
$$

Innalzando alla potenza ennesima ogni prima parentesi quadra, avremo le espressioni laterali del tr. equifattoriale ortocentrico di ordine m, $A_{1m}\,B_{1m}\,C_{1m}$, che possiamo costruire assumendo per fond. quello d'ordine $m - 1$ ($m = 1, 2, 3, 4, \ldots$) È facile fare le considerazioni per le formule laterali del corrispondente tr. associato di ordine m, $A_{0m}\,B_{0m}\,C_{0m}$. Lo studioso sviluppi codesto argomento, e come esercizio, provi che *perim* $A_1B_1C_1$ + *perim* $A_0B_0C_0 = 3$ *perim* HA_1Z [Formule (0) e primo gruppo (IV)].

8. — Il tr. fond. ABC possiede dunque **3** tr. prl-ortici convertici di primo ordine HA_1Z, HB_1X, HC_0V che al *n.* 5, *oss.* dicevamo *corrispondenti* rispettivamente agli angoli α, β, γ del fond. ABC.

Al solito, se consideriamo ognuno di questi tr. come fond., rispetto ad esso possiamo costruire la propria terna di tr. prl-ortici convertici di prim'ordine che rispetto al fond. ABC sono di secondo ordine. Avremo in tutto 9 tr. prl-ortici convertici di secondo ordine rispetto ad ABC. Osserviamo che nel tr. prl-ort. convertice di primo ordine rispetto ad ABC, HA_1Z, il suo lato HZ passante per l'orto-

Digitized by Google

centro H è opposto all'angolo in $A = \alpha$. E così noi possiamo scegliere fra i 3 tr. prl-ortici convertici di primo ordine ad esso relativi (ma che sono di secondo ordine rispetto ABC) quello il cui lato che passa per l'ortocentro del tr. HA_1Z sia sempre opposto all'angolo α appartenente al tr. HA_1Z.

Analogamente, rispetto al tr. prl-ortico convertice di primo ordine rispetto ad ABC, HB_1X, il cui lato HX passante per l'ortocentro H è opposto all'angolo β del fond. ABC, sceglieremo fra i 3 tr. prl-ortici convertici di primo ordine ad esso relativi (ma che sono di secondo ordine rispetto ad ABC) quello il cui lato passante per l'ortocentro del tr. HB_1X sia sempre opposto all'angolo β appartenente al tr. HB_1X. Finalmente rispetto al tr. prl. ortico convertice HC_0V, il cui lato HV passante per l'ortocentro H è opposto all'angolo γ del fond. ABC, isoliamo quel tr. prl-ortico convertice il cui lato passante per l'ortocentro del tr. HC_0V sia opposto all'angolo γ appartenente al tr. HC_0V. Così i 9 tr. prl-ortici di secondo ordine rispetto ad ABC sono costituiti dai 3 or ora determinati che diremo *principali* e dai 6 rimanenti che diremo *secondari*. Trascuriamo i secondari e ripetiamo inalterato il procedimento dianzi dichiarato, rispetto ai soli 3 tr. prl-ortici convertici principali di secondo ordine già costruiti: otterremo in tal modo 3 tr. prl. principali di terzo ordine rispetto ad ABC. Così continuando conformemente, isoleremo 2 tr. prl-ortici principali d'ordine m rispetto al fond. ABC ($m = 1, 2, 3, \ldots$). Tutti i tr. prl-ortici convertici generabili successivamente da ogni tr. prl-ortico secondario sono ugualmente secondari a qualunque diramazione appartengano. Ora, le formule [IV] mostrano la legge formale dei lati dei tr. prl-ortici convertici principali di primo ordine rispetto ad ABC: HA_1Z, HB_1X, HC_0V che *corrispondono* rispett. agli angoli α, β, γ del fond.: Basta moltiplicare *i lati del fond. stesso* per un'acconcia espressione trigonometrica facile a costruire in *corrispondenza ad ognuno* di quegli angoli cui vengono riferiti i triangoli prl-ortici convertici considerati. Talchè l'analisi di quelle formule sarà bastevole per mostrarci come con successivo processo ricorrente si faccia la formazione delle formule laterali dei tr. prl-ortici convertici principali d'ordine m rispetto al fond. ABC. Avremo dunque:

$$\sigma_{1m} = a\, cotg^m \alpha\, (cotg\, \gamma - cotg\, \beta)^m \qquad \varrho_{1m} = b\, cotg^m \beta\, (cotg\, \gamma - cotg\, \alpha)^m$$

$$\sigma_{2m} = b \ldots \qquad \varrho_{2m} = c \ldots$$

$$\sigma_{3m} = c \ldots \qquad \varrho_{3m} = a \ldots$$

Digitized by Google

[V]

$$\eta_{1m} = c\ cotg^m \gamma\ (cotg\ \alpha - cotg\ \beta)^m$$
$$\eta_{2m} = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$
$$\eta_{3m} = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

9. — Quanto alle formule laterali dei tr. prl-ortici convertici secondari d'ordine λ possiamo sempre scriverle senza difficoltà di sorta nei singoli casi, ben determinati, che eventualmente si presentassero. Premettiamo intanto — conformemente a come abbiamo fatto al n. 4, il seguente

Teor.: Le formule più generali dei lati Φ, Ψ, Θ *di un tr. prl-ortico convertice d'ordine* λ *rispetto al fond.* A B C *son rappresentate dall'espressioni*

$$\Phi = a\ cotg^m \alpha\ cotg^n \beta\ cotg^p \gamma\ (cotg\ \gamma - cotg\ \beta)^m (cotg\ \gamma - cotg\ \alpha)^n (cotg\ \alpha - cotg\ \beta)^p$$

[VI] $\Psi = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$

$$\Theta = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad .$$

nelle quali m, n, p *sono* 3 *numeri interi qualunque positivi (in particolare uguali e non simultaneamente nulli) tali che* $m + n + p = \lambda$.

Oss.· Quando due numeri della terna (m, n, p) *sono nulli le* VI *si riducono alle* V *relative ai tr. prl-ortici convertici principali. In ogni altro caso le* VI *corrispondono alle formule laterali di tr. prl-ortici convertici secondari d'ordine* λ *rispetto al fond.* ABC.

Lo studioso può illustrare queste teorema con qualche esempio uniformandosi all'esempio congenere del n. 4.

§ IV. - Triangoli perimetrali ortocentrici d'ordine m ($m = 1, 2, 3, \ldots$).

10. — I tr. HPR, HSM, HQN che hanno un vertice comune nell'ortocentro H ed il lato opposto a questo vertice giace sul contorno del tr. fond. li diciamo *tr. perimetrali ortocentrici* di primo ordine rispetto al fond. ABC. In base alle relazioni del n. 2 i loro lati si calcolano rapidamente ed avremo

$$PR = a\ cotg\ \beta\ cotg\ \gamma \quad SM = b\ cotg\ \gamma\ cotg\ \alpha \quad NQ = c\ cotg\ \alpha\ cotg\ \beta$$

[VII] $HP = b \quad . \quad . \quad . \quad . \quad HS = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad HN = a \quad . \quad . \quad . \quad .$

$$HR = c \quad . \quad . \quad . \quad . \quad HM = a \quad . \quad . \quad . \quad . \quad HQ = b \quad . \quad . \quad . \quad .$$

Se rispetto a ciascun tr. perimetrale ortocentrico costruiamo la propria terna dei tr. perim. ort. di primo ordine, otteniamo 9 tr. perimetrali ort. che diciamo di secondo ordine rispetto ad ABC. E così di seguito analogamente. Tre soltanto di questi 9 triangoli hanno un lato giacente sul contorno del tr. fond. ABC. Noi li diciamo

Digitized by Google

tr. perim. ort. *principali* di secondo ordine. I rimanenti 6 triangoli sono tr. perim. ort. *secondari* di secondo ordine. Eliminando i 6 secondari costruiamo su ciascuno dei 3 tr. porimetrali ort. principali di secondo ordine la propria terna di tr. perim. ort. di primo ordine. Avremo 9 tr. perim. ort. di terzo ordine rispetto al fond. ABC. Tra questi sceglieremo i 3 che hanno un lato giacente sul contorno del tr. fond. ABC, eliminando i 6 rimanenti. Continuando conformemente il processo isoleremo 3 tr. perim. ort. principali d'ordine m rispetto al fond. ABC.

Se $H_{am}\,P_m\,R_m$, $H_{bm}\,S_m\,M_m$, $H_{cm}\,Q_m\,N_m$ sono i loro simboli rappresentativi avverrà che i loro vertici H_{am}, H_{bm}, H_{cm}, staranno rispett. sulle altezze del fond. ABC relative ai lati $BC = a$, $CA = b$, $AB = c$ ed inoltre i loro lati $P_m\,R_m$, $S_m\,M_m$, $Q_m\,N_m$ giacciono ordinatamente su codesti lati. Il segmento $P_m\,R_m$ ad esempio, diminuisce col crescere dell'indice d'ordine m ed inoltre, per qualunque valore di quest'indice, contiene nel suo interno il piede H_a della altezza AH_a relativa al lato $BC = a$ in cui giace il segmento $P_m\,R_m$ considerato.

I tr. ultimamente dichiarati *corrispondono* agli angoli α, β, γ del fond. ABC: Le loro formule laterali deduconsi analizzando la legge formale delle relazioni al quadro VII ed avremo:

$$\begin{array}{ll} P_m\,R_m = a\,cotg^m\beta\,cotg^m\gamma & S_m\,M_m = b\,cotg^m\gamma\,cotg^m\alpha \\ H_{am}\,P_m = b \;.\;.\;.\;.\;. & H_{bm}\,S_m = c \;.\;.\;.\;.\;. \\ H_{am}\,R_m = c \;.\;.\;.\;.\;. & H_{bm}\,M_m = a \;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

[VIII]
$$\begin{array}{l} N_m\,Q_m = c\,cotg^m\alpha\,cotg^m\beta \\ H_{cm}\,N_m = a \;.\;.\;.\;.\;. \\ H_{cm}\,Q_m = b \;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

11. — La determinazione delle formule dei tr. perim. ort. secondari di un dato ordine non presenterà difficoltà di sorta nei singoli casi, ben determinati, che eventualmente si presentassero. Premettiamo intanto il

Teor.: Le formule più generali dei lati u, v, w *di un tr. perimetrale ortocentrico d'ordine* λ *rispetto al fond.* ABC *son rappresentate dall'espressioni*

[IX]
$$\begin{array}{l} u = a\,cotg^{p+q}\alpha\,cotg^{m+q}\beta\,cotg^{m+p}\gamma \\ v = b \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \\ w = c \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. \end{array}$$

Digitized by Google

dove m, p, q *sono numeri interi positivi* (*in particolare uguali e non simultaneamente nulli*) *tali che* $m + p + q = \lambda$.

Oss.: Quando 2 numeri della terna m, p, q *sono nulli, le* IX *si riducono alle* VIII *rappresentanti lati di tr. per ort. principali; negli altri casi le* IX *si riferiscono a formule laterali di tr. perim. ort. secondari d'ordine* λ *rispetto al fond.* ABC.

Illustriamo questo teorema con qualche esempio. Consideriamo il triangolo perim. ort. principale d'ordine *m* rispetto ad ABC e corrispondente all'angolo α: i suoi lati sono rappresentati dal primo gruppo delle [VIII]. Se rispetto al suo vertice R_m, d'angolo β, costruiamo il corrispondente tr. perim. ort. principale d'ordine *p* (che però è secondario rispetto ad ABC e d'ordine $m + p$) i suoi lati si ottengono moltiplicando quelli del tr. $H_{am} P_m R_m$ per $\cot g^p \gamma \cot g^p \alpha$. Se rispetto al tr. d'ordine $m + p$ ultimamente costruito determiniamo il suo tr. perim. ort. principale d'ordine *q* (che però è secondario rispetto ad ABC e d'ordine $m + p + q$) corrispondente al suo angolo γ, i lati di questo triangolo secondario d'ordine $m + p + q$ si ottengono moltiplicando quelli del tr. secondario d'ordine $m + p$ per $\cot g^q \alpha \cot g^q \beta$. Allora saranno rappresentati dal gruppo [IX] già dichiarato.

§ V. - Vicendevoli riferimenti triangolari.

12. — Una sorgente di formule, *pur sempre elegantissime, corrispondentemente all'importante loro significato geometrico*, scaturisce appena che noi facciamo vicendevoli riferimenti triangolari. Ci intenderemo brevemente con qualche caso notabile lasciando poi a cura dello studioso di operare conformemente in mille modi su codesto soggetto, anche tenendo presenti i risultati conseguiti in quell'altro nostro lavoro congenere pubblicato in questa Rivista (A. V, n. 8-9).

a) *In un tr. prl-ort. principale d'ordine* m *corrispondente all'angolo* α *del fond.* ABC, *determinare i lati del suo tr. prl-ortico convertice principale d'ordine* p *corrispondente all'angolo* α *appartenente al tr. prl-ortico considerato.*

Il lati del tr. prl-ortico principale d'ordine *m* sono dati dal primo gruppo delle [II] e perciò, in base alla legge formale del primo gruppo [V] relativo ai lati del tr. prl-ortico convertice principale corrispondente all'angolo α, avremo infine:

Digitized by Google

$$i_a = a\, cotg^{m+p}\alpha\, (cotg\,\gamma + cotg\,\beta)^m\, (cotg\,\gamma - cotg\,\beta)^p$$

X $\quad j_a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$s_a = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si scrivono subito le formule analoghe rispetto agli angoli β, γ. [secondi e terzi gruppi II e V].

b) *In un tr. perimetrale ort. d'ordine* m *(principale) corrispondente all'angolo* $A = \alpha$ *del fond.* ABC *determinare i lati del suo tr. prl-ortico principale d'ordine* p *corrispondente all'angolo* α *appartenente al tr. perimetrale considerato.*

Avremo tosto, considerando i primi gruppi VIII e II corrispondenti.

$$x_a = a\, cotg^p\alpha\, cotg^m\beta\, cotg^m\gamma\, (cotg\,\gamma + cotg\,\beta)^m$$

XI $\quad y_a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$z_a = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si scrivono facilmente le formule analoghe rispetto agli angoli β, γ. [secondi e terzi gruppi VIII e II].

c) *In un tr. perimetrale ort. principale d'ordine* m *corrispondente all'angolo* $A = \alpha$ *del fond.* ABC, *determinare i lati del suo tr. prl-ortico convertice principale d'ordine* p *corrispondente all'angolo* α *appartenente al tr. perimetrale considerato.*

Avremo, in base ai gruppi VIII e V (primi gruppi) corrispondenti:

$$d_a = a\, cotg^p\alpha\, cotg^m\beta\, cotg^m\gamma\, (cotg\,\gamma - cotg\,\beta)^m$$

XII $\quad e_a = b \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$f_a = c \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Si scrivono facilmente le formule analoghe rispetto agli angoli β, γ. [secondi e terzi gruppi VIII e V]

d) *Relativamente ad un tr. prl. ortico principale d'ordine* m *rispetto al fond.* ABC, AM_mN_m, *corrispondente all'angolo* $A = \alpha$ *del fond.* ABC, *determinare i lati dei suoi 3 tr. Brocardiani ort. doppiamente principali d'ordine* p.

I lati del tr. AM_mN_m sono espressi dal primo gruppo II. Ed ora per determinare i lati del tr. Brocard. ort. doppiam. principale d'ordine *p* corrispondente, ad esempio, al lato M_mN_m che nel suo triangolo è opposto all'angolo α, bisogna moltiplicare, come sappiamo (*Rassegna loc. cit.*) ciascun lato del tr. di riferimento, che nel caso nostro è il tr. AM_mN_m, per $\frac{1}{2^p}\,(cotg\,\gamma - cotg\,\beta)^p$. Avremo dunque:

Digitized by Google

$$\varphi_a = \frac{1}{2^p}\ a\ cotg^m\alpha\ (cotg\,\gamma + cotg\,\beta)^m\ (cotg\,\gamma - cotg\,\beta)^p$$

$$\sigma_a = \frac{1}{2^p}\ b\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$\varrho_a = \frac{1}{2^p}\ c.\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Si scrivono facilmente le espressioni dei lati dei tr. Broc. ort. dopp. principali d'ordine p corrispondenti ai rimanenti lati del tr. AM_mN_m.

e) *Relazioni laterali fra i tr. prl-ortici convertici e i tr. Broc. ort. dopp. principali dello stesso ordine.* Sappiamo (*Rassegna loc. cit.*) che i lati x_{1m}, x_{2m}, x_{3m} del tr. Broc. ort. dopp. principale corrispondente al lato $BC = a$, opposto all'angolo α, son dati dalle relazioni ($m = 1, 2, 3, \ldots$)

$$x_{1m} = \frac{1}{2^m}\ a\ (cotg\,\gamma - cotg\,\beta)^m$$

$$x_{2m} = \frac{1}{2^m}\ b.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

$$x_{3m} = \frac{1}{2^m}\ c.\ .\ .\ .\ .\ .\ .$$

Si scrivono immediatamente le formule analoghe relative ai lati. y_{1m}, y_{2m}, y_{3m}; z_{1m}, z_{2m}, z_{3m} dei tr. Brocardiani corrispondenti ai rimanenti lati $CA = b$, $AB = c$ del fond. ABC.

Quindi, ad esempio, $(\text{cotg}\,\gamma - \text{cotg}\,\beta)^m = \frac{1}{a}\,2^m \cdot x_{1m} = \frac{1}{b}\,2^m \cdot x_{2m} = \frac{1}{c}\,2^m \cdot x_{3m}$.

Allora sostituendo nelle [V] avremo esteso il ragionamento a tutti i lati:

$\sigma_{1m} = x_{1m} \cdot 2^m \cdot cotg^m\alpha$	$\varrho_{1m} = y_{1m} \cdot 2^m \cdot cotg^m\beta$	$\eta_{1m} = z_{1m} \cdot 2^m \cdot cotg^m\gamma^m$
$\sigma_{2m} = x_{2m} \cdot 2^m \cdot cotg^m\alpha$		
$\sigma_{3m} = x_{3m} \cdot 2^m \cdot cotg^m\alpha$	*e analoghe*	*e analoghe*

Per $m = 1$, si ha, ad esempio, $\frac{\sigma_{11}}{x_{11}} + \frac{\varrho_{11}}{y_{11}} + \frac{\eta_{11}}{z_{11}} = 2(cotg\,\alpha + cotg\,\beta + cotg\,\gamma) = 2\,cotg\,\omega$, ω essendo l'*angolo di* Brocard del fond. ABC ecc.

Terminiamo qui questo lavoro avvertendo che la brevità dello spazio consentitoci nella Rivista non ci ha permesso se non di schematizzare le teorie dianzi dichiarate, onde noi abbiamo posto a base e non a fine il contenuto delle considerazioni già fatte. Il lettore, cui non sono state sgradite codeste speculazioni, può completare e sviluppare meglio da sè quelle parti che sono state trattate assai concisamente e tante questioni che i principi appena adombrati vengono preparando.

Digitized by Google

Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione (*)

DI

DOMENICO GALLO

10. — *Teorema. - Due triangoli sono eguali, se hanno un lato, un angolo ad esso adiacente ed il lato opposto a quest'angolo rispettivamente eguali, purchè l'angolo opposto al primo dei suddetti lati nei due triangoli sia della stessa specie.*

Nei triangoli ABC e A'B'C' sia $\overline{AB} = \overline{A'B'}$, $\hat{A} = \hat{A}'$, $\overline{BC} = \overline{B'C'}$, e sia l'$\hat{C}$ della stessa specie dell'$\hat{C}'$. — Trasportiamo il secondo sul primo triangolo in modo che coincida $\hat{A}'$ con $\hat{A}$ e $\overline{A'B'}$ con $\overline{AB}$; i due lati $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ sono ora corde eguali di un fascio laterale dell'$\hat{A}$ e fanno angoli della stessa specie, quindi (n. 7) coincidono.

Corollario. — Due triangoli sono eguali se hanno un lato, un angolo ad esso adiacente ed il lato opposto a quest'angolo rispettivamente eguali, purchè l'angolo suddetto sia ottuso.

11. — Gli angoli di una corda normale (corda normale alla bisettrice) sono uguali, ma quelli di qualunque altra sono disuguali: *l'angolo anteriore di una corda è maggiore di quello posteriore.*

Infatti, sia O il punto d'intersezione (fig. 2) di una corda $\overline{BB'}$ dell'$\hat{A}$ con la sua bisettrice $\overline{AO}$, e sia $\overline{KN}$ la corda normale del fascio bisettoriale di centro O; gli angoli della KN sono eguali e indichiamoli con ε, indichiamo con φ l'obliquità della $\overline{BB'}$; l'angolo antoriore della $\overline{BB'}$ è $A\hat{B}B' = \varepsilon + \frac{\pi}{2} - \varphi$, l'angolo posteriore è $A\hat{B}'B = \varepsilon - \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$; quindi $A\hat{B}B' - A\hat{B}'B = \pi - 2\varphi$; ed, essendo $\varphi \leq \frac{\pi}{2}$, sarà $\pi - 2\varphi \geq 0^0$; in conseguenza $A\hat{B}B' \geq A\hat{B}'B$.

Il caso limite, cioè, $A\hat{B}B' = AB'\hat{B}$, è quello della corda normale; in tal caso non vi è più luogo a distinzione di angolo anteriore ed angolo posteriore.

(*) Continuazione dell'articolo dal medesimo titolo in *Rassegna* A. VI, pag. 1. Il cortese lettore è pregato di rileggere i paragrafi 1 e 2 a pag. 4 e 5 ov'è raccolta quasi tutta la nomenclatura creata per questa teoria.

Digitized by Google

Possiamo dunque asserire che: *Se due angoli, uno di una corda uno di un'altra dello stesso angolo, sono eguali, essi sono angoli corrispondenti* (ossia omologhi cioè tutti due anteriori, o tutti due posteriori). — E inoltre: *Se due corde formano angoli corrispondenti eguali adiacenti allo stesso lato, esse sono parallele.*

12. — *Definizione. - Due corde dello stesso angolo ovvero una di un angolo e l'altra del suo opposto al vertice, le chiameremo corde antiparallele quando una è parallela alla simmetrica dell'altra.*

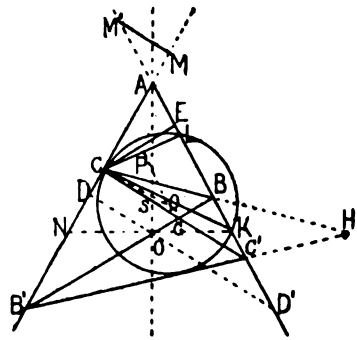


Fig. 2.

Sia $\overline{DD'}$ (fig. 2) la corda simmetrica della $\overline{BB'}$, siano $\overline{CC'}$ ed $\overline{MM'}$ parallele a $\overline{DD'}$; le $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ sono *corde antiparallele* dell'$\hat{A}$, $\overline{BB'}$ e $\overline{MM'}$ lo sono sia dell'$\hat{A}$ che dell'$M\hat{A}M'$.

13. — Possiamo asserire che: *Se due corde sono antiparallele* (per esempio: $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$: a) *gli estremi corrispondenti non giacciono sullo stesso lato;* e inoltre b) *gli angoli corrispondenti sono eguali* ($\hat{B} = \hat{C}$, $\hat{B'} = \hat{C'}$); c) *esse hanno eguale obliquità* ($A\hat{O}B = A\hat{S}C$); d) *coi lati formano triangoli simili* (ABB' e ACC'); e) *una di esse e le distanze dei suoi estremi sono proporzionali all'altra e alle corrispondenti distanze* ($\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AB'} : \overline{AC'} = \overline{BB'} : \overline{CC'}$); f) *i rettangoli delle distanze non corrispondenti sono equivalenti* ($\overline{AB} \times \overline{AC''} = \overline{AB'} \times \overline{AC}$); g) *il rettangolo di una corda e di una delle distanze dell'altra è equivalente al rettangolo dell'altra corda e della distanza della prima corrispondente alla precedente* ($\overline{BB'} \times \overline{AC} = \overline{CC'} \times \overline{AB}$, $\overline{BB'} \times \overline{AC'} = \overline{CC'} \times \overline{AB'}$).

Sussistono le proposizioni reciproche delle precedenti, cioè: *Si può asserire che due corde sono antiparallele quando:* a) *gli estremi corrispondenti non giacciono sullo stesso lato, e si sappia inoltre che si verifica una delle proprietà* b), c), d), e), f), g), cioè: b) *gli*

Digitized by Google

angoli corrispondenti sono eguali, c) *le obliquità sono eguali*, d) *i triangoli che formano coi lati sono simili*, ecc.

È superfluo darne le dimostrazioni che in generale si fanno considerando una delle corde antiparallele e la simmetrica dell'altra, ovvero per considerazione di triangoli simili, e qualche volta per assurdo.

14. — Queste proprietà delle corde antiparallele, e anche quella che ci ha servito per la definizione, si verificano tutte quando si verifica la proprietà *a*) insieme a una delle *b*), *c*), *d*), *e*), *f*), *g*); quindi per definire le corde antiparallele potevo assumere la proprietà *a*) e una qualunque delle *b*), *c*) *d*), ecc.

Per esempio, potevo assumere le proprietà *a*) e *b*) e dire: *due corde dello stesso angolo, ovvero una di un angolo e l'altra del suo opposto al vertice, le chiameremo corde antiparallele quando gli angoli corrispondenti sono eguali e non adiacenti allo stesso lato;* ovvero, ciò che vale lo stesso, *quando l'angolo che una di esse fa con un lato è uguale a quello che l'altra corda fa con l'altro lato.* — L'esperienza mi ha insegnato che quando s'indaga sopra una figura, questa definizione è comoda, cioè la figura ordinariamente si presta alla constatazione dell'eguaglianza dell'angolo che una corda fa con un lato a quello che l'altra fa con l'altro lato; a ciò si è indotti spesso, perciò avrei dato volentieri questa definizione; ho preferito l'altra (11), perchè giustifica la denominazione di antiparallele.

15. — In particolare si ha il seguente: *Teorema. — Se due corde antiparallele hanno un estremo in comune, la distanza di questo è media proporzionale fra le distanze degli altri due estremi.*

Sia $\overline{CE}$ (fig. 2) antip. di $\overline{CC'}$; si ha (12, f):
$\overline{AC}^2 = \overline{AC'} \times \overline{AE}$. — c. v. d.

16. — *Corollario. — Se da un punto di un lato si conducono quante si voglia coppie di antiparallele, il rettangolo degli estremi non comuni di ciascuna coppia è costante.*

17. — *Teorema. — Le congiungenti gli estremi corrispondenti di due corde antiparallele sono corde antiparallele.*

Se $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ sono corde antiparallele, lo sono anche $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$; infatti si ha (12, e): $\overline{AB} : \overline{AC} = \overline{AB'} : \overline{AC'}$, quindi sono simili i due triangoli ABC e AB'C, e in essi sono omologhi i lati $\overline{AB}$ e $\overline{AB'}$, perciò $A\hat{C}B = A\hat{C}'B'$, e in conseguenza (13, *a*, *b*) $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ sono corde antiparallele.

18. — *Teorema. — I segmenti dei lati compresi fra gli estremi*

Digitized by Google

di due corde antiparallele sono corde antiparallele dell'angolo delle prime, che li contiene.

Dato per ipotesi che $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ sono corde antiparallele dell'$\hat{A}$ $\overline{BC'}$ e $\overline{B'C}$ lo sono dell'$\hat{H}$; infatti, (12, *a*, *b*) $A\hat{B}C = C\hat{B}'H$, ma $A\hat{B}C = H\hat{B}C'$, dunque $C\hat{B}'H = H\hat{B}C'$; perciò (13, *a*, *b*) $\overline{BC'}$ è antip. di $\overline{B'C}$ nell'$\hat{H}$.

19. — *Scolio.* — Dai teoremi 17 e 18 si deduce che quando si sappia che una delle tre coppie (fig. 2) $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$, $\overline{BC'}$ e $\overline{B'C}$ è coppia di corde antiparallele, si può asserire che lo sono anche le altre due; ciascuna coppia appartiene a due angoli: $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$ sono corde antiparallele dell'$\hat{A}$ e dell'$\hat{H}$, $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ lo sono dell'$\hat{A}$ e dell'$B\hat{G}C$ (ovvero $B'\hat{G}C'$), $\overline{BC'}$ e $\overline{B'C}$ sono corde antiparallele dell'$\hat{H}$ e dell'$B\hat{G}C'$ (ovvero $B'\hat{G}C$).

20. — *Teorema. — Se due corde sono antiparallele di una stessa corda, sono parallele tra loro.*

Infatti, esse sono entrambe parallele alla simmetrica della loro antiparallela.

21. — *Teorema* (reciproco del precedente). *Se due corde sono parallele, un'antiparallela dell'una è antiparallela dell'altra.*

22. — *Teorema. — Gli estremi di due corde antiparallele giacciono sopra una circonferenza.*

1° *Caso.* — Le corde s'incontrino fuori dell'angolo, come (fig. 2) $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$; il quadrilatero BCB'C' è inscrittibile, perchè si ha (12, *a*, *b*,) $A\hat{B}C = C\hat{B}'C'$, e quindi, essendo l'$C\hat{B}C'$ adiacente all'$A\hat{B}C$, esso è supplementare del $C\hat{B}'C'$.

2° *Caso.* — Le corde s'incontrino nell'angolo, come $\overline{BB'}$ e $\overline{CC'}$; si ritorna al 1° caso considerando che (17) allora $\overline{BC}$ e $\overline{B'C}$ sono corde antiparallele.

23. — *Teorema* (reciproco del precedente). — *Se un quadrilatero è inscrittibile, due lati opposti sono corde antiparallele dell'angolo degli altri due, e anche dell'angolo delle diagonali che li contiene; le diagonali sono corde antiparallele dell'angolo di due lati opposti.*

Se BCB'C' è un quadrilatero inscrittibile (fig. 2), è l'$C\hat{B}'C'$ supplementare dell'$C\hat{B}C'$ ma l'$A\hat{B}C$ è supplementare dell'$C\hat{B}C'$, quindi $C\hat{B}'C' = A\hat{B}C$, e perciò $\overline{BC}$ e $\overline{B'C'}$ (13, *a*, *b*) sono corde antiparallele dell'$\hat{A}$; ecc.

24. — In particolare si ha il seguente: *Teorema. — Se due corde antiparallele hanno un estremo in comune, il lato passante per questo estremo è tangente alla circonferenza passante per gli estremi.*

Digitized by Google

Infatti, se $\overline{CL}$ e $\overline{CK}$ sono corde antiparallele dell'$\hat{A}$ (fig. 2), Q centro della circonferenza passante per C, K e L, ed è $\overline{QP}$ normale a $\overline{CL}$, si avrà $A\hat{C}L = A\hat{K}C = C\hat{Q}P$; ma l'$Q\hat{C}P$ è complementare dell'$\hat{C}QP$, quindi lo è dell'$A\hat{C}L$, perciò l'$A\hat{C}Q$ è retto.

25. — *Teorema. Due segmenti con un estremo in comune sono corde antiparallele dell'angolo della congiungente degli altri due e della tangente nell'estremo comune alla circonferenza passante per gli estremi.*

Siano CL e CK due segmenti con l'estremo C in comune, sia $\overline{AC}$ tangente alla circonferenza passante per C, K e L, sia A il suo punto d'insersezione con la KL; l'$A\hat{C}L$, che la $\overline{CL}$ fa col lato AC, è eguale all'$A\hat{K}C$, che la $\overline{CK}$ fa col lato AK, perciò $\overline{CK}$ e $\overline{CL}$ sono corde antiparallele dell'$\hat{A}$.

26. — *Corollario. — Dati due segmenti con un estremo in comune, esiste sempre un angolo, del quale essi sono corde antiparallele.*

(Continua).

Progressioni aritmetiche a doppia ragione (*)

DI

LUIGI CONTE.

4. — Tenendo presenti i teoremi dimostrati possiamo determinare la somma d'un numero qualunque di termini d'una progressione (d d_1).

Teorema 4°. La somma d'un numero pari di termini d'una progressione (d d_1) *è uguale al semiprodotto della somma degli estremi pel numero dei termini.*

Indicando con S_n la somma dei primi n termini delle [1] con n pari:

$$\left.\begin{aligned} S_n &= a_1 + a_2 + \ldots + a_n \\ S_n &= a_n + a_{n-1} + \ldots + a_1 \end{aligned}\right\} \text{Sommando:}$$

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

(*) Continuazione dell'articolo dal medesimo titolo pubblicato in *Rassegna* A. VI, N. 6-7, pag. 80.

Digitized by Google

dove le somme parziali che compaiono al secondo membro sono in numero di n; pel teor. II si ha

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n$$

Teorema 5°. — La somma d'un numero dispari di termini d'una progressione (d d_1) *è uguale alla differenza tra il semiprodotto della somma dei termini estremi pel numero dei termini e la quarta parte del prodotto della differenza tra la seconda e la prima ragione pel numero dei termini considerati diminuito di uno.*

Infatti alle notazioni precedenti:

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + (a_2 + a_{n-1}) + \ldots + (a_n + a_1)$$

dove le somme parziali del secondo membro sono in numero di n; pel teor. III

$$2\,S_n = (a_1 + a_n) + [(a_1 + a_n) - (d_1 - d)] + \ldots (a_1 + a_n)$$

In questa relazione compariscono al secondo membro $\frac{n+1}{2}$ termini uguali ad $(a_1 + a_n)$ ed $\frac{n-1}{2}$ uguali ad $[(a_1 + a_n) - (d_1 - d)]$, quindi:

$$2\,S_n = \frac{(a_1 + a_n)(n+1)}{2} + \frac{(a_1 + a_n) - (d_1 - d)}{2}(n-1)$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2} \cdot n - \frac{(d_1 - d)(n-1)}{4} \qquad (\theta)$$

5. — Risolvendo rispetto a d la formula (α) si ha

$$d = \frac{2(a_s - a_1) - d_1(s-2)}{s} \qquad (a);$$

risolvendola invece rispetto a d_1 si ha per $s > 2$

$$d_1 = \frac{2(a_s - a_1) - s \cdot d}{s-2} \qquad (b).$$

Risolvendo prima rispetto a d e poi rispetto a d_1 la formula (β) si ha per $s > 1$;

$$d = \frac{2(a_s - a_1)}{s-1} - d_1 \qquad (c)$$

$$d_1 = \frac{2(a_s - a_1)}{s-1} - d \qquad (d).$$

Digitized by Google

Le formule (a), (b), (c), (d) ci permettono di risolvere il seguente problema: Dati due numeri a e b inserire fra essi m numeri, che insieme con a e b formano una progressione aritmetica a doppia ragione, nota che sia una delle ragioni.

Se m è pari il numero dei termini è $m+2$ pari; se si conosce, ad es., la seconda ragione d_1 per la (a) si ha:

$$d = \frac{2(b-a) - d_1 m}{m+2}$$

e quindi la progressione richiesta è:

$$\dot{=} \; a,\; a + \frac{2(b-a) - d_1 m}{m+2}, \ldots, a + \frac{m}{m+2}(d_1 + b - a),\; b$$

Analogamente se si conoscesse la prima ragione d.

Se m è dispari, il numero dei termini è $m+2$ dispari; se si conosce, ad es., la prima ragione d, per la (d) si ha:

$$d_1 = \frac{2(b-a)}{m+1} - d$$

e la progressione richiesta è

$$\dot{=} \; a,\; a+d,\; a + \frac{2(b-a)}{m+1}, \ldots\; b + \frac{2(b-a)}{m+1} - d,\; b$$

Analogamente se si conoscesse la seconda ragione d_1.

6. — Osserviamo che se fosse $d = d_1$, tutte le formole trovate si riducono alle note formole delle progressioni aritmetiche ad una ragione, come è naturale, perchè per $d = d_1$ la [1] si riduce ad una tale progressione.

Se fosse $d_1 = kd$ le formole trovate diventano rispettivamente:

$$a_s = a_1 + \frac{s(k+1) - 2k}{2} \cdot d \qquad (\alpha')$$

$$a_s = a_1 + \frac{(s-1)(k+1)}{2} \cdot d \qquad (\beta')$$

$$a_s + a_{n-1+s} = a_1 + a_n - d(k-1) \qquad (\varepsilon')$$

$$a_s = \frac{(a_1 + a_n) - d(k-1)}{2} \qquad (\eta')$$

$$S_n = \frac{(a_1 + a_n)}{2} \cdot n - \frac{d(k-1)(n-1)}{4} \qquad (\theta')$$

Gioia del Colle, gennaio 1926.

Digitized by Google

NOTE DIDATTICHE

Densità e peso specifico.

Osservando l'articolo « *Densità e peso specifico* » pubblicato a pag. 111, A. VI, N. 8-9 di questa rivista, mi pare che la questione vada impostata diversamente.

La *densità assoluta* è un'entità fisica, essendo la massa contenuta nell'unità di volume di un corpo omogeneo;

$$d = \frac{m}{v}.$$

Il *peso specifico assoluto* è pure un'entità fisica ed è il peso della massa contenuta nell'unità di volume

$$p = \frac{P}{v}$$

Se g è l'accelerazione di gravità del luogo ove si determina p si ha

$$p = g\,d;$$

e quindi mentre la *densità assoluta* è invariabile, il *peso specifico assoluto* è funzione dell'accelerazione di gravità. D'altra parte la *densità relativa* δ è il rapporto fra la densità d assoluta di un corpo e la densità assoluta d_1 di un altro corpo scelto pel riferimento. Perciò δ è un *numero*, non entità fisica; si ha

$$\delta = \frac{d}{d_1} = \frac{m}{v} : \frac{m_1}{v} = \frac{m}{m_1}.$$

Essendo poi definito il *peso specifico relativo* π di una sostanza il rapporto fra il peso specifico assoluto di essa e il peso specifico assoluto di un altro corpo scelto per il riferimento; π è un altro *numero*, non entità fisica; e si ha

$$\pi = \frac{p}{p_1} = \frac{dg}{d_1 g} = \frac{d}{d_1} = \delta.$$

E quindi il numero π (*peso specifico relativo*) e il numero δ (*densità relativa*) sono uguali.

Mi pare che le cose esposte in questo modo non possano dare origine a nessuna confusione agli allievi.

R. Istituto tecnico di Novara.
9 dicembre 1926.

Ugo Fornari.

Digitized by Google

Sulla sezione aurea di un segmento (*).

Vogliamo dare qui una nuova dimostrazione di una notissima costruzione relativa alla ricerca della parte aurea di un segmento.

Immaginiamo il problema risoluto e sia BN la parte aurea del segmento assegnato BC; costruiamo il quadrato avente per lato $OC = BC : 2$, sia esso OCWH e congiungiamo B con W ed H con N dicendo P il loro punto d'incontro. Dai triangoli simili HPW, BPN si ha

$$BN : WC = BP : PW$$

da cui

$$BN + WC : WC = BW : PW$$

e quadrando

$$\overline{BN^2} + \overline{WC^2} + 2\,BN \,.\, WC : \overline{WC^2} = \overline{BW^2} : \overline{PW^2}$$

Ma

$$\overline{BN^2} = BC \times NC = 2\,(\overline{WC^2} - WC \,.\, ON)$$

per cui sostituendo, si ha subito dalla figura che lasciamo disegnare al cortese lettore,

$$5\ \overline{WC^2} : \overline{WC^2} = \overline{BW^2} : \overline{PW^2}$$

da cui

$$\frac{BW}{PW} = \sqrt{5}$$

D'altra parte, dal triangolo BWC, si ha

$$\frac{BW}{WC} = \sqrt{5}$$

quindi

$$PW = WC$$

perciò $PW = WH$ e il triangolo PHW è isoscele; sarà allora isoscele anche il triangolo BPN, cioè $BP = BN$.

Concludendo, « la congiungente HN divide la BW in due parti di cui l'una è la parte aurea di BC e l'altra è la metà del segmento stesso ».

(*) Vedi la mia Nota in proposito (Tip. A. Redaelli, Via G. Galileo, N. 39, Milano).

Digitized by Google

Si deduce la costruzione seguente;

« Dato un segmento BC per fissare il punto N, si riporti sulla perpendicolare per C, un segmento $CW = BC : 2$; quindi con centro W e raggio CW si descriva un arco di cerchio fino ad intersecare in P la BW. Con centro B e raggio BP si descriva un arco di cerchio fino ad intersecare BC in N; BN sarà la parte aurea richiesta ».

Ponendo $BN = R$, $NC = r$ avremo perciò

$$R^2 = r(R + r)$$

od anche

$$\frac{R}{r} = \frac{R+r}{R} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

da cui componendo

$$\frac{R+r}{R} = \frac{2R+r}{R+r} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

cioè $R + r = BC$ sarà la parte aurea di $2R + r$.

Ora se sulla figura relativa alla costruzione precedente prolunghiamo BW fino ad incontrare in U il cerchio di centro W e raggio $WC = BC : 2$ e con centro B e raggio BC tagliamo BU in F, ne risulta $BC = PU$ e sarà $2R + r = BU$. Noto BC, è subito determinato quindi il segmento BU ossia è immediata la costruzione del segmento relativo alla parte aurea assegnata, e se immaginiamo di descrivere con centro B e raggio BU un arco di cerchio fino ad incontrare il prolungamento di CB in B', avremo risoluto anche l'altro problema di determinare un segmento (B'C) quando ne sia data la parte minore (BC) della sua sezione aurea.

Milano, aprile 1926.

GIULIO VICI.

La Direzione *della* Rassegna *ringrazia sentitamente i chiarissimi associati e collaboratori:*

Prof. **Gallo Domenico** *di Corato*

Ing. Gr. Uff. **Toja Guido** *di Roma*

che vollero unirsi essi pure agli abbonati sostenitori menzionati nel fascicolo prededente.

Direzione ed Amministrazione: **Istituto G. Ferraris** — Roma.

Direttore responsabile: Prof. Enrico Gradara.

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore - *Città di Castello* - 1927.

Digitized by Google

ARCHIMEDE

IL METODO

Quest'opera di *Archimede*, l'ultima scoperta, tradotta per la prima volta in italiano è corredata di numerose note esplicative, critiche, storiche e di citazioni, da una prefazione e da una tavola delle figure.

Indice della prefazione. 1° Ragione della traduzione. 2° Le opere di Archimede. 3° La scoperta del *Metodo.* 4° Il contenuto del *Metodo.* 5° Le traduzioni del *Metodo.*

Indice del Metodo: Introduzione. Lemmi. 1° Area del segmento di parabola. 2° Volume della sfera. 3° Volume dell'ellissoide. 4° Volume del segmento di paraboloide. 5° Centro di gravità del segmento di paraboloide. 6° Centro di gravità dell'emisfero. 7° Volume del segmento di sfera. 8° Volume del segmento di ellissoide. 9° Centro di gravità del segmento di sfera. 10° Centro di gravità del segmento di ellissoide. 11° Volume e centro di gravità del segmento di iperboloide. 12° Volume di un particolare segmento di cilindro P. I 13° *Id. id.* P. II. 14° *Id. id.* Dimostrazione con la parabola ausiliaria 15° *Id. id.* Dimostrazione geometrica.

Inviare cartolina vaglia di **L. 6** al **Prof. ENRICO GRADARA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris***, Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore

(Perugia) CITTA' DI CASTELLO (Perugia)

Esecuzione accurata ed elegante di qualsiasi genere di lavoro tipografico di lusso e commerciale: Libri - Opuscoli - Riviste - Giornali - Cartoline illustrate ed illustrazioni - Carte intestate - Buste - Biglietti - Modelli - Registri - Libretti Colonici - Partecipazioni di lutto e di nozze, ecc.

Avendo l'azienda carattere di Scuola per orfani e non scopo di lucro, è in grado di praticare prezzi modicissimi.

Digitized by Google

ANNO VII
(1297)
DELLA

Rassegna di Matematica e Fisica

Abbonamento all'anno VII: Italia L. 20 - Estero L. 25
Un numero separato dell'anno VII: Italia L. 3 - Estero L. 3,50

ai librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento

inviare cartolina vaglia al

Prof. MARCELLO PUMA
Istituto G. Ferraris - Piazza di Spagna, 35 - Roma (6)

---

*A coloro che ci invieranno in una sola volta l'importo di 5 nuovi abbonamenti si concederà l'***abbonamento gratuito.**

La corrispondenza con la Rassegna deve essere inviata all'indirizzo:

Direzione della Rassegna - Istituto G. Ferraris
Piazza di Spagna 35 - Roma (6)

N.B. *Per avere pronta risposta occorre inviarne l'affrancatura in francobolli.*

VITA NUOVA

ABBONAMENTO ANNUO L. 2

Dirigere vaglia

ISTITUTO "G. FERRARIS"
Piazza di Spagna 35 - ROMA (6)

Digitized by Google

324ª
11.676

Anno VII - N. 5-6 Maggio-Giugno 1927

RASSEGNA

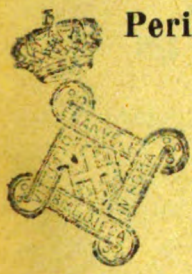
DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA



SOMMARIO

MARIO FRAILIK: Il problema dell'elicottero.

DOMENICO GALLO: Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione.

Note didattiche — Nuova dimostrazione del secondo e del primo teorema di Euclide sull'equivalenza dei rettangoli (FEDERICO CHIAPPETTI). — Un valore approssimato di π quale radice di un'equazione quadratica a coefficienti razionali semplici (CARLO SCHOR) — Su un sofisma matematico (LEONARDO VINGIANI).

Questioni didattiche — Ancora sui temi di matematica assegnati agli esami di stato nel 1925 (ATTILIO GASPARINI).

Libri ricevuti.

ABBONAMENTO ANNUO:

ITALIA. . . L. **20** — ESTERO. . . L. **25**

Inviare l'importo all'Amministrazione

Piazza di Spagna, 35 ROMA (6)

ROMA

—

Direzione e Amministrazione:

Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

ANNO VII

(1297)

DELLA

Rassegna di Matematica e Fisica

Abbonamento all'anno VII: Italia L. 20 - Estero L. 25

Un numero separato dell'anno VII: Italia L. 3 - Estero L. 3,50

ai librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento

inviare cartolina vaglia al

Prof. MARCELLO PUMA

Istituto G. Ferraris - Piazza di Spagna, 35 - Roma (6)

---

*A coloro che ci invieranno in una sola volta l'importo di 5 nuovi abbonamenti si concederà l'***abbonamento gratuito.**

La corrispondenza con la Rassegna deve essere inviata all'indirizzo:

Direzione della Rassegna - Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna 35 - Roma (6)

N.B. *Per avere pronta risposta occorre inviarne l'affrancatura in francobolli.*

VITA NUOVA

ABBONAMENTO ANNUO L. 2

Dirigere vaglia

ISTITUTO " G. FERRARIS „

Piazza di Spagna 35 - ROMA (6)

Digitized by Google

Il problema dell'elicottero

DI

MARIO FRAILIK.

III. — La stabilità longitudinale automatica.

Non è da escludere (ci riferiamo alla nostra precedente nota dallo stesso titolo) (*) che si possa, con una buona disposizione delle elici sostentatrici, e con un buon numero di queste, rendere se non uniforme la somma delle spinte ascensionali da esse prodotte, almeno variabile entro limiti abbastanza ristretti. Nè è pure da escludere che i movimenti oscillatori dell'asse longitudinale dell'apparecchio possano essere annullati addirittura.

In un elicottero poi avente una grande inerzia, tutte le oscillazioni di cui si è parlato, se esistessero, si ridurrebbero forse a delle semplici vibrazioni, non troppo diverse da quelle prodotte in ogni apparecchio dagli scoppi dei motori.

Queste ipotesi, le quali attendono una risposta definitiva dall'esperienza, ci hanno spinto a considerare il volo dell'elicottero sotto un aspetto più ampio e con la speranza di giungere a qualche risultato utile.

Già nei riguardi del timone di profondità si era trovato qualcosa.

Qui riprendiamo il nostro studio, trovando prima quali siano le componenti delle forze secondo l'asse a e secondo la normale ad esso nel piano verticale passante per a, e nell'ipotesi che in tal piano l'apparecchio si muova di moto uniforme.

Avvertiamo poi che nel seguito, a differenza di quanto facemmo nella prima parte, chiameremo con R la somma delle resistenze all'avanzamento di tutte e sole le elici sostentatrici, con Φ la spinta delle medesime secondo la direzione del loro asse di rotazione e, quando ne sia il caso, anzichè con P, indicheremo con mg il peso dell'apparecchio, m essendo la sua massa e g l'accelerazione di gravità.

(*) Vedi: Parti I e II in *Rassegna* A. V - N. 10-11-12 e A. VI - N. 10-11-12.

Digitized by Google

Rimangono tutte le condizioni restrittive precedentemente ammesse.

Ciò posto, le forze agenti secondo l'asse a sono:

la F, spinta dell'elice di asse a;

la $- C_0 v^2$, resistenza assiale dello scafo;

la $- R$, somma delle resistenze relative alle elici sostentatrici;

la $- Kv^2 (\theta - \beta + \xi) \, sen \, \xi$, componente secondo l'asse della resistenza ai timoni di profondità;

la $- mg \, sen \, \theta$, componente secondo l'asse del peso dell'apparecchio.

Le forze agenti secondo la normale all'asse a sono:

la Φ, spinta totale delle elici sostentatrici;

la $C_1 v^2 (\theta - \beta)$, resistenza dello scafo normale all'asse;

la $Kv^2 (\theta - \beta + \xi) \, cos \, \xi$, resistenza dei timoni secondo la normale all'asse;

la $- mg \, cos \, \theta$, componente del peso dell'apparecchio.

Durante il volo in regime di equilibrio si dovrà avere:

$$C_1 \lambda_1 v^2 (\theta - \beta) + K\lambda v^2 (\theta - \beta + \xi) \, cos \, \xi = 0 \qquad (1)$$

$$(F - R) - C_0 v^2 - Kv^2 (\theta - \beta + \xi) \, sen \, \xi - mg \, sen \, \theta = 0 \qquad (2)$$

$$\Phi + C v^2 (\theta - \beta) + Kv^2 (\theta - \beta + \xi) \, cos \, \xi - mg \, cos \, \theta = 0 \qquad (3)$$

Qualora i timoni formassero con l'asse un angolo $\xi = 0$ le equazioni precedenti diverrebbero:

$$(C_1 \lambda_1 + K\lambda) (\theta - \beta) v^2 = 0 \qquad (4)$$

$$mg \, sen \, \theta = (F - R) - C_0 v^2 \qquad (5)$$

$$mg \, cos \, \theta - (C_1 + K) v^2 (\theta - \beta) = \Phi \qquad (6)$$

Se la R potesse esprimersi in funzione di v queste tre equazioni, e così pure le altre tre, permetterebbero di ricavare θ, β, v corrispondenti al volo in regime d'equilibrio con $\xi = 0$ e $\xi \neq 0$.

Nella prima parte del nostro articolo abbiamo esclusa, nei riguardi dei timoni, la condizione

$$C_1 \lambda_1 + K\lambda > 0 \, .$$

Soffermiamoci invece ancora sulla

$$C_1 \lambda_1 + K\lambda = 0 \qquad (a)$$

e studiamola più particolarmente.

Sotto questa ipotesi, per $\xi = 0$, la (4) sarebbe soddisfatta da qualunque valore di θ e di β.

La (5) e la (6), sempre nel caso di $\xi = 0$, rimanendo

Digitized by Google

esse le sole equazioni caratterizzanti il moto in regime d'equilibrio darebbero, se R fosse esprimibile in funzione di v, per ogni θ i corrispondenti valori di β e v.

Vediamo ora se, essendo l'apparecchio ad un certo istante in volo uniforme con gli angoli θ e β rispettivamente uguali a θ_0 e β_0 e con la velocità v uguale a v_0, esso opponga, di per sè, qualche fattore alla possibile variazione dei predetti angoli. In altri termini vediamo se esso volo è stabile o no.

Certo l'inerzia dell'apparecchio si oppone in ogni istante a una tale variazione; non va dimenticata neppure l'azione dell'elice motrice e quella delle sostentatrici tendenti al medesimo effetto. Di queste però non ci occuperemo.

Supponiamo che l'asse possa, in seguito ad una causa istantanea qualunque, assumere nel piano verticale un moto intorno al suo baricentro di velocità angolare $\frac{d\theta}{dt}$. Avvenendo tal moto in un mezzo resistente, l'aria stessa tenderà a smorzarlo generando:

I: un momento resistente dello scafo, esprimibile con la formula

$$C_z' v \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad ;$$

II: un momento resistente dei timoni, esprimibile dal pari con la formula

$$C_z'' v \cdot \frac{d\theta}{dt} \quad .$$

I coefficienti C_z' e C_z'' dipendono dalla forma ed estensione dello scafo e dei timoni e dalla densità dell'aria.

L'equazione del moto dell'asse longitudinale rispetto al baricentro sarà perciò:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} + (C_z' + C_z'') v \frac{d\theta}{dt} = 0 \quad ,$$

ove I è il momento d'inerzia dell'apparecchio rispetto all'asse baricentrico trasverso (asse perpendicolare ad a e parallelo alle pale delle elici sostentatrici).

Ponendo:

$$C_z' + C_z'' = C_z$$

e integrando si ha:

$$I \frac{d\theta}{dt} + C_z v \theta + Z_i = 0 \quad .$$

Digitized by Google

L'integrale generale di questa è:

$$\theta(t) = -\frac{Z_1}{C_2 v} + Z_2 e^{-\frac{C_2 v\, t}{I}} \qquad (7)$$

ove Z_1 e Z_2 sono delle costanti dipendenti dalle condizioni iniziali del problema.

E se per $t = 0$ era:

$$\theta = \theta_0 \qquad \frac{d\theta}{dt} = \omega$$

le costanti assumeranno i valori:

$$Z_1 = -C_2 v\left(\theta_0 + \frac{I\omega}{C_2 v}\right)$$

$$Z_2 = -\frac{I\omega}{C_2 v}$$

onde:

$$\theta(t) = \left(\theta_0 + \frac{I\omega}{C_2 v}\right) - \frac{I\omega}{C_2 v} e^{-\frac{C_2 v\, t}{I}} \qquad (7')$$

L'equazione (7') mostra che in seguito ad uno spostamento dell'asse dalla sua posizione iniziale (sempre per $\xi = 0$) esso asse non può automaticamente ritornare alla posizione primitiva.

Tuttavia ove l'esponenziale risulti tendente o zero al crescere di t (il che richiede $C_2' + C_2'' > 0$) l'asse si fermerà su di una seconda posizione definita dall'angolo:

$$\theta = \theta_0 + \frac{I\omega}{C_2 v} .$$

Ciò induce, per virtù delle (5) e (6), una variazione pure nell'angolo β. Non può escludersi che per questo nuovo valore di θ possa aversi ancora il volo uniforme; ma è certo che, sotto le condizioni viste e per $\xi = 0$, questo volo non appare di sicuro dotato di soddisfacente stabilità.

Si consideri il caso di ξ diverso da zero, e perciò si riprendano in esame le equazioni (1), (2) e (3).

Se si ritiene che ξ sia così piccolo da poter sostituire l'unità a $\cos\xi$ si ricava dalla (1):

$$C_1 \lambda_1 v^2 (\theta - \beta) + K\lambda v^2 (\theta - \beta + \xi) = 0$$

Digitized by Google

da cui

$$v^2(\theta-\beta)(C_1\lambda_1+K\lambda)+K\lambda v^2\xi=0$$

e, per la (a),

$$K\lambda v^2\xi=0,$$

zelazione assurda.

Se invece di $\cos\xi$ si possono trascurare le potenze del suo sviluppo in serie di grado superiore al secondo, dalla (1) dopo brevi calcoli, e sempre ricordando la (a), si ottiene,

$$(\theta-\beta)\xi=2-\xi^2.$$

Per ξ, che pure è piccolo, questa relazione ci mostra come $\theta-\beta$ dovrebbe essere invece abbastanza grande, oltre i limiti per cui alcune delle formule adottate sono valide. Ora, durante il volo, $\theta-\beta$ può divenire si abbastanza grande, ma ciò solo eccezionalmente, e certo mai in una misura come la

$$(\theta-\beta)\xi=2-\xi^2$$

lascia prevedere.

I risultati che potrebbero venire dalla risoluzione del sistema (1), (2), (3) sono perciò privi di qualunque valore pratico.

A meglio provare quanto si è detto sopra si consideri l'equazione di Lagrange relativa al moto dell'asse *a* intorno al baricentro, sempre che si possa sostituire l'unità a $\cos\xi$.

Esso è:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}-C_1\lambda_1 v^2(\theta-\beta)-K\lambda v^2(\theta-\beta+\xi)+C_2 v\frac{d\theta}{dt}=0,$$

da cui, ricordando la (a),

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}+C_2 v\frac{d\theta}{dt}=K\lambda v^2\xi.$$

E integrando, se Z_1 e Z_2 sono delle costanti:

$$\theta(t)=-\left(\frac{IK\lambda\xi}{C_2^2}-\frac{Z_1}{C_2 v}\right)+Z_2 e^{-\frac{C_2 v t}{I}}+\frac{K\lambda v\xi}{C_2}t.$$

Il termine esponenziale tenderà a zero al crescere di *t* se è, come già si è visto $C_2>0$; ma il terzo termine, in qualunque caso, cresce uniformemente col tempo. Uniformemente col tempo varierebbe quindi l'inclinazione θ dell'asse con l'orizzonte.

Suppongasi ora

$$C_1\lambda_1+K\lambda<0 \qquad (b)$$

Digitized by Google

cioè il momento raddrizzante dei timoni maggiori di quello rovesciante dello scafo.

E perciò, al fine di rendere i calcoli più semplici, si suppongano i timoni costituiti da due parti: l'una fissa (impennaggi fissi di coda) formata ad esempio da un piano passante per l'asse, orizzontale quando l'apparecchio è orizzontale, e avente per coefficiente di αv^2, nell'espressione del relativo momento raddrizzante, un $K\lambda$ tale da soddisfare la condizione (a)

$$C_t \lambda_t + K\lambda = 0 \ ;$$

l'altra invece mobile e di coefficienti $K' \lambda'$.

Quando la parte mobile (timone propriamente detto) forma con l'asse a un angolo $\xi = 0$, il momento da essa generato

$$K' \lambda' v^2 (\theta - \beta)$$

si somma all'altro

$$K\lambda v^2 (\theta - \beta)$$

ed obbliga realmente l'apparecchio ad un regime di volo caratterizzato dalla coincidenza dell'asse col moto.

Si avrà perciò in ogni istante

$$\theta = \beta .$$

La (5) e la (6) diverranno:

$$mg \, sen \, \theta = (F - R) - C_0 v^2$$
$$mg \, cos \, \theta = \Phi ,$$

da cui ne verrebbero i valori di θ e v corrispondenti al volo in condizioni d'equilibrio.

Ci si può chiedere anche a questo punto se, navigando l'apparecchio ad un certo istante in condizioni di coassialità col moto, nel caso il suo asse assumesse una nuova inclinazione, diversa dalla iniziale, esso possa ritornare alla primitiva posizione, automaticamente.

È chiaro che, qualora avvenisse questo, il volo potrebbe dirsi stabile.

Ma è facile vedere come ciò non avvenga.

Si osservi intanto che se θ_0 e β_0 (con $\theta_0 = \beta_0$) sono le condizioni iniziali relative al movimento uniforme, una nuova inclinazione θ_1 dell'asse indurrà pure una variazione nell'angolo β. Gli angoli θ e β varieranno quindi insieme fino a quando si troverà l'equilibrio dei momenti con due nuovi angoli θ_2 e β_2 fra di loro eguali.

Ma in queste concomitanti variazioni può darsi benisissimo

Digitized by Google

che la componente verticale della Φ muti al punto da rendere, insieme alle altre forze, impossibile il volo in regime di equilibrio.

Volendo tener conto dell'inerzia dell'apparecchio e della resistenza opposta dall'aria si dovrebbe considerare l'equazione di Lagrange del moto relativo al baricentro:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} - K'\lambda' v^2(\theta - \beta) + C_1 v\frac{d\theta}{dt} = 0 ,$$

in cui $C_2 v\frac{d\theta}{dt}$ è il momento resistente complessivo dello scafo e dei timoni, e dalla quale si ottiene:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + C_1 v\frac{d\theta}{dt} - K'\lambda' v^2\theta = -K'\lambda' v^2\beta .$$

Si osservi però che l'angolo β è funzione di t.

Infatti della ΣF_y la somma delle componenti di tutte le forze secondo la verticale, e u la componente verticale della velocità assunta dal baricentro, si ha:

$$m\frac{du}{dt} = \Sigma F_y .$$

E poichè è in ogni istante

$$u = v\ sen\ \beta$$

(ritenendo v costante lungo la traiettoria) ne deriva essere β funzione di t.

Si dovrebbe quindi considerare il sistema di equazioni differenziali:

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} + C_1 v\frac{d\theta}{dt} - K'\lambda' v^2\theta = -K'\lambda' v^2\beta$$

$$mv\ cos\ \beta\frac{d\beta}{dt} = \Sigma F_y$$

in cui ΣF_y contiene entrambe le variabili θ e β .

Ma noi non ci fermiamo su questo sistema, paghi di quanto abbiamo già notato.

Resta ora a vedere cosa accade quando l'angolo ξ dei timoni è diverso da zero.

L'equazione dei momenti diviene:

$$K'\lambda' v^2(\theta - \beta + \xi)\ cos\ \xi = 0 .$$

Quella delle forze secondo l'asse:

$$(F - R) - C_0 v^2 - K' v^2(\theta - \beta + \xi)\ sen\ \xi - mg\ sen\ \theta = 0$$

Digitized by Google

e quella delle normali all'asse

$$\Phi + C_1 v^2 (\theta - \beta) + K v^2 (\theta - \beta) + K' v^2 (\theta - \beta + \xi) \cos\xi - mg \cos\theta = 0.$$

La prima di queste è soddisfatta da

$$\theta = \beta - \xi ,$$

onde le altre due divengono:

$$(F - R) - C_0 v^2 - mg \, sen\, \theta = 0$$
$$\Phi - (C_1 + K) v^2 \xi - mg \cos\theta = 0$$

da cui risulterebbero i valori di θ e v corrispondenti al volo in regime d'equilibrio.

Nulla di diverso da quanto si è detto per $\xi = 0$ ci tocca di dire questa volta.

Se ad un dato istante l'apparecchio è in regime di volo uniforme con $\theta = \theta_0$ e $\beta = \beta_0$, tali in oltre che sia $\theta_0 = \beta_0 - \xi$, una variazione dell'angolo θ indurrà pure una variazione in β.

Gli angoli θ e β varieranno quindi insieme fino a quando si ritroverà l'equilibrio dei momenti con due nuovi angoli θ_1 e β_1, tali che sia $\theta_1 = \beta_1 - \xi$.

Semprechè, intanto, la componente verticale della Φ e delle altre forze non mutino in maniera tale da rendere impossibile il ristabilirsi dell'equilibrio.

* * *

In conclusione, si voleva vedere se l'elicottero potesse possedere nel volo quelle proprietà capaci di renderlo stabile e sicuro automaticamente, vale a dire senza la necessità dell'intervento del pilota ad ogni scarto dell'asse longitudinale (1).

Attraverso ipotesi di varia natura, alcune delle quali poi devono attendere il responso dei pratici, se da una parte si è vista la possibilitàr di regimi di volo uniforme (o quasi uniforme), nei riguardi della stabilità automatica la risposta non è certo in senso positivo.

Digitized by Google

Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione

DI

DOMENICO GALLO

Applicazione ai poligoni ed alle circonferenze.

27. — Ci occuperemo anzitutto dei triangoli.

Il lettore è pregato di rileggere il n. 9 della prima parte di quest'articolo a pag. 10 del fascicolo 1°, anno VI.

Per brevità di linguaggio bisogna stabilire qualche convenzione.

In un triangolo un lato è corda dell'angolo opposto: nel triangolo ABC (fig. 3) il lato $\overline{AC}$ è corda dell'$\hat{B}$ (e potremo dire anche: *corda rispetto al vertice B);* ma un lato non può essere corda di uno dei due angoli ad esso adiacenti: AC non può essere corda dell'$\hat{A}$ o dell'$\hat{C}$; perciò quando diremo semplicemente *antiparallela di un lato,* deve sottintendersi: *rispetto all'angolo ad esso opposto* (ovvero, ciò che significa lo stesso, *rispetto al vertice opposto*). E inoltre, essendo un lato corda dell'angolo opposto, per un vertice non si può condurre l'antip. al lato opposto, ma si può condurla a ciascuno dei lati ivi concorrenti: costruendo $C\hat{A}D = \hat{B}$, la $\overline{AD}$ (13, a, b) è antip. di $\overline{AB}$ (sottinteso: rispetto all'$\hat{C}$), e con $B\hat{A}I = \hat{C}$, la $\overline{AI}$ è antip. di $\overline{AC}$ (nell'$\hat{B}$); perciò dicendo: *antip. per un vertice,* è sottinteso: *ad uno dei lati ivi concorrenti,* dicendo: *le antip. per un vertice,* è sottinteso: *a ciascuno dei lati ivi concorrenti.*

Fu convenuto (pag. 5, n. 1, anno VI) che per *distanze di una corda* si intendono le *distanze dei suoi estremi* (anteriore e posteriore) *dal vertice dell'angolo;* ora, una delle distanze di una corda per un vertice è *lato* del triangolo, quando occorrerà indicarla, la chiameremo *lato;* sicchè, quando considereremo una di tali corde, dicendo: *distanza della corda* (e, qualche volta, semplicemente: *distanza*), dovrà intendersi: la *distanza dell'estremo che non coincide col vertice;* così: la distanza di $\overline{AD}$ (corda antip. di $\overline{AB}$ pel vertice A) è $\overline{DC}$, quella di $\overline{AI}$ (antip. di $\overline{AC}$ per A) è $\overline{BI}$.

Per brevità diremo: *il rettangolo di due segmenti,* volendo si-

Digitized by Google

gnificare: *il rettangolo avente per lati consecutivi i due segmenti*; *il prodotto di due segmenti* per *il prodotto dei valori di due segmenti.*

28. — *Teorema* (delle due antiparallele fra loro pei vertici). *Se in un triangolo dagli estremi di un lato si conducono nell'angolo opposto due corde antiparallele fra loro:* 1° *sono equivalenti i due rettangoli di ciascuno degli altri lati e dell'antip. pel vertice opposto,* 2° *sono equivalenti i due rettangoli di ciascuno dei medesimi e della distanza su esso giacente,* 3° *sono equivalenti i due rettangoli di ciascuna antiparallela e della distanza dell'altra,* 4° *sono equivalenti i due rettangoli dei segmenti in cui il punto d'intersezione delle antiparallele divide ciascuna di esse.*

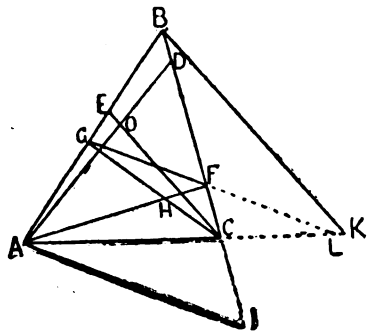


Fig. 3.

Siano $\overline{AF}$ e $\overline{CG}$ antiparallele fra loro (fig. 3); avremo: (12, g) $\overline{AB} \times \overline{CG} = \overline{BC} \times \overline{AF}$, (12, f) $\overline{AB} \times \overline{BG} = \overline{BC} \times \overline{BF}$, (12, g) $\overline{CG} \times \overline{BF} = \overline{AF} \times \overline{BG}$, e infine (n. 17, n. 12, f) $\overline{HA} \times \overline{HF} = \overline{HG} \times \overline{HC}$.

Nota. Tenendo presente i n. 19 e (12, d), si possono ricavare molte relazioni metriche fra i segmenti prodotti anche dalla GL.

29. — *Teorema* (del quadrato di un lato). *Conducendo da un vertice di un triangolo l'antip. ad un lato, l'altro è m. p. fra il lato opposto e la distanza.*

Nel triangolo ABC sia $\overline{AD}$ antip. di $\overline{AB}$ (fig. 3), avremo (n. 15): $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC}$.

30. — Nel triangolo rettangolo l'altezza sull'ipotenusa è antip. di ciascun cateto, quindi con nomenclatura ordinaria il precedente teorema in questo caso si riduce al teorema di Euclide, 1ª tesi: *In ogni triangolo rettangolo ciascun cateto è m. p. fra l'ipotenusa e la sua proiezione sull'ipotenusa stessa.*

31. — *Teorema* (dei due lati). *Due lati di un triangolo sono proporzionali alle distanze delle loro rispettive antiparallele per gli estremi del terzo lato.*

Nel triangolo ABC (fig. 3) siano $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$ antip. di $\overline{AB}$ e $\overline{CB}$ si ha (15): $\overline{AC}^2 = \overline{BC} \times \overline{DC} = \overline{AB} \times \overline{AE}$, quindi $\overline{AB} : \overline{BC} = \overline{DC} : \overline{AE}$.

32. — *Teorema* (dei quadrati di due lati) *I quadrati di due lati di un triangolo sono inversamente proporzionali alle distanze delle loro rispettive antiparallele pel vertice ad essi comune.*

Digitized by Google

Nel triangolo ABC (fig. 3) siano $\overline{AD}$ e $\overline{AI}$ antip. di $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$,

è (15) $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{BC} \times \overline{BI}}{\overline{BC} \times \overline{DC}} = \frac{\overline{BI}}{\overline{DC}}$.

33. — Siccome la distanza dell'antiparallela ad un cateto pel vertice dell'angolo retto è la proiezione dell'altro cateto, sull'ipotenusa, il precedente teorema con nomenclatura ordinaria si riduce al seguente ben noto:

Corollario. — In ogni triangolo rettangolo i quadrati dei cateti sono proporzionali alle rispettive proiezioni sull'ipotenusa.

34. — *Teorema* (dei cubi di due lati). *I cubi di due lati di un triangolo sono proporzionali alle distanze delle antip. al terzo lato pei loro rispettivi estremi.*

Nel triangolo ABC (fig. 3) siano $\overline{BK}$ e $\overline{CE}$ antip. di $\overline{BC}$; si ha

(15) $\frac{\overline{AB}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} \times \frac{\overline{AK}}{\overline{AE}}$, da cui $\frac{\overline{AB}^3}{\overline{AC}^3} = \frac{\overline{AK}}{\overline{AE}}$.

35. — *Teorema* (del prodotto di due lati, 1°) *Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente al rettangolo delle distanze delle antip. al terzo lato per i suoi stessi estremi.*

Nel triangolo ABC (fig. 3) siano $\overline{BK}$ e $\overline{CE}$ antip. di $\overline{BC}$, esse sono parallele tra loro (20), quindi $\overline{AB} : \overline{AK} = \overline{AE} : \overline{AC}$, da cui $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{AE} \times \overline{AK}$.

36. — Dal precedente teorema si ha: *L'area di un triangolo è eguale al semiprodotto del seno di un suo angolo e delle distanze delle antiparallele al terzo lato per i suoi stessi estremi.*

37. — *Teorema* (dell'antip. a un lato; 1°) *L'antiparallela ad un lato di un triangolo forma con le rette degli altri due un triangolo simile al dato.*

38. — *Teorema* (dell'antip. per un vertice). *L'antiparallela per un vertice di un triangolo è eguale al prodotto dei due lati ivi concorrenti diviso pel terzo lato;* ovvero: *Il rettangolo di due lati di un triangolo è equivalente a quello del terzo lato e dell'antiparallela pel vertice ad esso opposto.*

Sia $\overline{AD}$ antip. di $\overline{AB}$ (fig. 3); i triangoli ABC e ADC (37) sono simili, e forniscono: $\overline{AB} : \overline{AD} = \overline{BC} : \overline{AC}$, da cui $AD = \frac{\overline{AB} \times \overline{AC}}{\overline{BC}}$, ovvero $\overline{AB} \times \overline{AC} = \overline{BC} \times \overline{AD}$.

Digitized by Google

39. — Dal precedente teorema scende: *L'area di un triangolo è eguale al semiprodotto di un lato per il seno dell'angolo opposto e dell'antip. pel suo vertice.*

40. — Dai teoremi 35 e 38 scende il seguente: *Teorema* (dell'antip. per un vertice, 2°). *L'antip. per un vertice di un triangolo è eguale al prodotto delle distanze delle due antip. al lato opposto, condotte dai suoi stessi estremi, diviso pel medesimo.*

41. — *Teorema* (del triangolo isoscele formato dalle antip. a due lati). *Le rette delle antip. a due lati di un triangolo formano con quella del terzo lato un triangolo isoscele; le bisettrici degli angoli delle medesime sono una normale, l'altra parallela a questo lato.*

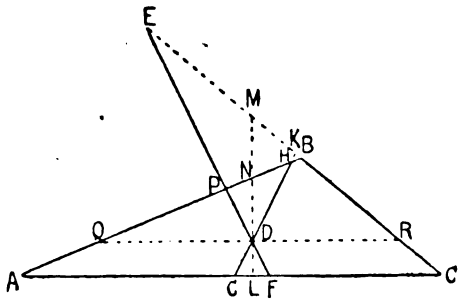


Fig. 4.

Nel triangolo ABC siano $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ antip. di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (fig. 4); dev'essere $\hat{B} = H\hat{G}A = E\hat{F}C$, quindi il triangolo GDF è isoscele; ossia, più in generale, le due antiparallele a due lati devono formare col terzo lato angoli eguali a quello opposto al medesimo, dalla stessa parte di questo e non diretti nello stesso verso; quindi il triangolo che si forma è isoscele. È superfluo dimostrare la seconda tesi.

42. — *Corollario. Le antiparallele pel vertice di un triangolo sono eguali.*

43. — *Teorema* (del prodotto delle antip. a due lati). *Il rettangolo delle antip. a due lati di un triangolo è equivalente a quello delle distanze degli estremi delle medesime giacenti sul terzo lato.*

Siano EF e GH antip. di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ (fig. 4); i due triangoli AGH e CEF sono simili ad ABC (37), quindi simili tra loro, e forniscono: $\overline{EF} : \overline{AG} = \overline{CF} : \overline{GH}$, da cui $\overline{EF} \times \overline{GH} = AG \times CF$.

44. — *Teorema* (del quadrato dell'antip. per un vertice). *L'antip. pel vertice di un triangolo è m. p. fra le distanze delle due antip. per quel vertice.*

Siano $\overline{AD}$ e $\overline{AI}$ antip. di $\overline{AB}$ e $\overline{AC}$ (fig. 3); sarà $\overline{AD} \times \overline{AI} = \overline{CD} \times \overline{BI}$ (43), ma $\overline{AD} = \overline{AI}$ (42) quindi $\overline{AD}^2 = \overline{CD} \times \overline{BF}$.

45. — Nel triangolo rettangolo le antip. pel vertice dell'angolo retto coincidono con l'altezza sull'ipotenusa, e le distanze sono le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa; quindi, riducendo il precedente teorema a questo caso particolare, possiamo con nomenclatura

Digitized by Google

ordinaria enunciare il *Teorema* (di Euclide, 2ª tesi). *In ogni triangolo rettangolo l'altezza sull'ipotenusa è m. p. fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.*

46. — *Teorema* (delle antip. a due lati per gli estremi del terzo). *In ogni triangolo un lato è m. p. fra le antip. per i suoi estremi agli altri due.*

Nel triangolo ABC (fig. 3) siano $\overline{AD}$ e CE le antip. a $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$; siccome le distanze delle due antip. sul lato $\overline{AC}$ coincidono con lo stesso lato, cioè la distanza dell'estremo A e di $\overline{AD}$ è $\overline{AC}$, e quella dell'estremo C di $\overline{CE}$ è pure $\overline{AC}$, si ha (43) $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{CE}$.

47. — Nel triangolo rettangolo le antip. ai cateti sono normali all'ipotenusa; quindi, riducendo il precedente teorema a questo caso particolare, possiamo asserire il seguente: *Teorema. In ogni triangolo rettangolo il quadrato dell'ipotenusa è equivalente al rettangolo dei segmenti intercettati dai prolungamenti dei cateti sulle normali all'ipotenusa stessa per i suoi estremi.*

48. — *Teorema* (dei tre rettangoli). *In ogni triangolo i tre rettangoli delle due antiparallele per gli estremi di un lato agli altri e della distanza di ciascuna di esse e del lato, sul quale giace, sono equivalenti.*

Infatti (fig. 3) se $\overline{AD}$ e $\overline{CE}$ sono antiparallele di $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$, si ha (46): $\overline{AC}^2 = \overline{AD} \times \overline{CE}$, e (31) $\overline{AC}^2 = \overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{BC} \times \overline{DC}$; quindi: $\overline{AD} \times \overline{CE} = \overline{AB} \times \overline{AE} = \overline{BC} \times \overline{DC}$.

49. — *Teorema* (dei coniugati armonici). *In un triangolo conducendo per un punto la normale e la parallela ad un lato e le antip. agli altri due, i punti d'intersezione della retta di uno di questi con le prime due sono coniugati armonici dei punti d'intersezione della medesima con le due antiparallele.*

Siano $\overline{DL}$ e $\overline{QR}$ (fig. 4) la normale e la parallela ad $\overline{AC}$ condotte nel triangolo ABC dal punto D, e siano $\overline{EF}$ e $\overline{GH}$ le due antiparallele ad $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$ per D; il triangolo DGF (41) è isoscele, quindi DL è la bisettrice dell'angolo al vertice, e DR è bisettrice del suo adiacente; perciò, per un noto teorema di geometria, si ha: $\overline{ME} : \overline{MK} = \overline{RE} : \overline{RK}$.

Analogamente si ha $\overline{NH} : \overline{NP} = \overline{QH} : \overline{QP}$.

(Continua)

Corato, agosto 1926.

Digitized by Google

NOTE DIDATTICHE.

Nuova dimostrazione del secondo e del primo teorema d'Euclide sull'equivalenza di rettangoli.

È noto che il teorema di Pitagora può essere agevolmente dimostrato scomponendo in uno stesso numero di poligoni rispettivamente eguali il quadrato della ipotenusa e un particolar poligono che sia una somma di quadrati aventi per lati i cateti d'un triangolo rettangolo; però, che io mi sappia, non è stato mai in maniera del tutto semplice dimostrato il secondo teorema d'Euclide riferentesi al quadrato dell'altezza relativa alla ipotenusa, senza tener conto del primo riferentesi al quadrato d'un cateto deducendo il predetto secondo teorema da quello di Pitagora e poi il primo dal secondo teorema d'Euclide e dal teorema di Pitagora. Sia ABC un triangolo rettangolo e sia $\overline{AH}$ l'altezza relativa alla ipotenusa $\overline{BC}$.

Se O è il punto medio di $\overline{BC}$ la circonferenza O $(\overline{OB})$ passa per A.

Ora, se $\overline{AB} = \overline{AC}$, le proiezioni $\overline{BH}$, $\overline{CH}$ dei cateti sono eguali ed H non è distinto da O, per cui è $\overline{AH}^2 = \overline{AO}^2 = \overline{BO} \cdot \overline{CO} = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$.

Se poi $\overline{AB}$ è diverso da $\overline{AC}$, e se, tanto per fissare le idee $\overline{AB} < \overline{AC}$, è $\overline{BH} < \overline{CH}$, e reciprocamente, per cui H cade fra O e B, onde congiunto O con A, per il teorema di Pitagora e per il teorema sulla differenza di due quadrati è

$$\overline{AH}^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OH}^2 = (\overline{OA} + \overline{OH})\ (\overline{OA} - \overline{OH}) =$$
$$= (\overline{OC} + \overline{OH})\ (\overline{OB} - \overline{OH}) = \overline{CH} \cdot \overline{BH}.$$

Così è dimostrato il teorema secondo di Euclide: « *In un triangolo rettangolo il quadrato dell'altezza relativa alla ipotenusa equivale al rettangolo delle proiezioni dei cateti su di essa* ».

Ora essendo $\overline{AH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{CH}$ ed essendo $\overline{BH}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BH}$ e $\overline{CH}^2 = \overline{CH} \cdot \overline{CH}$, per il teorema di Pitagora e per il teorema della somma di due rettangoli aventi un lato eguale, sommando si ottiene corrispondentemente

$$\overline{AB}^2 = \overline{BH} \cdot \overline{BC} \quad \text{e} \quad \overline{AC}^2 = \overline{CA} \cdot \overline{BH};$$

cioè il primo teorema d'Euclide: « *Il quadrato d'un cateto di un triangolo rettangolo equivale al rettangolo della ipotenusa e della proiezione del cateto su di essa* ».

Sarzana, settembre 1926. FEDERICO CHIAPPETTI.

Digitized by Google

Un valore approssimativo di Π quale radice di un'equazione quadratica a coefficienti razionali semplici.

Il numero π, essendo irrazionale trascendente, non può essere radice di nessuna equazione algebrica; però tra i suoi valori approssimati ce ne sono di quelli che risultano quali radici di equazioni algebriche a coefficienti razionali relativamente semplici.

Così il valore approssimato per difetto:

$$\frac{3}{2} + \frac{1}{6}\sqrt{97} = 3{,}141476\ldots,$$

che differisce dal valore esatto di π di poco più di un decimillesimo, portato nella forma: $\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$ apparisce quale radice di:

$$x^2 - 3x - \frac{4}{9} = 0.$$

Ne risultano di qui due costruzioni approssimate per π.

Si eseguisce la prima (costruzione del binomio: $\frac{3}{2} + \sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(\frac{2}{3}\right)^2}$, portando sul lato orizzontale di un angolo retto con vertice O tre volte l'unità di misura ($OA_1 = A_1A_2 = A_2A_3$), su quello verticale due volte ($OB_1 = B_1B_2$); si tira la A_3C parallela alla A_3B_2 e si trasporta accanto al segmento OA_3 il segmento $A_3D = A_3C$; OD rappresenterà 2π.

Si eseguisce la seconda [risoluzione costruttiva dell'equazione $x(x-3) = \frac{4}{3} \cdot \frac{1}{3}$], portando sul cerchio di diametro uguale a 3 unità la corda AB uguale ad una unità e sul suo prolungamento il segmento $BC = \frac{1}{3}AB$; tirato il diametro DD', il cui prolungamento passa per C ($CD' > CD$), il segmento CD' rappresenterà la radice positiva dell'equazione, ossia il valore approssimato per π.

Da notarsi che l'equazione considerata, afferma che il rettangolo costruito sulla circonferenza rettificata (di raggio r) e sulla differenza tra questa ed il perimetro dell'esagono regolare iscritto è approssimativamente equivalente al quadrato di lato $\frac{4}{3}r$.

Pola, gennaio 1927.

Carlo Schor.

Digitized by Google

Su un sofisma matematico.

I. L'interessante sofisma del prof. Conte (*) fondato su un errore nel quale incorrono spesso gli allievi, mi fa venire alla mente un'altro sofisma che, credo, di aver trovato per primo quando ero studente, e che è suscettibile di curiose deduzioni.

Il sofisma di cui sopra è il seguente:

Se $a = b$ sarà $a^2 = b^2$, e, quindi

$$a - b = o \qquad a^2 - b^2 = o$$

da cui

$$a - b = a^2 - b^2$$

cioè: $$a - b = (a - b)(a + b)$$

Dividendo ambo i membri per $a - b$ si ha

$$1 = a + b$$

ovvero $$1 = 2a \ldots\ldots\ldots (1)$$

Cioè:

1°) L'unità è un numero pari.

2) L'unità è divisibile per qualunque numero.

Se chiamiamo m un numero qualunque, evidentemente con un ragionamento analogo al precedente avremo:

$$1 = 2m$$

e di conseguenza tenuto conto della (1) sarà

$$a = m$$

cioè:

8°) Tutti i numeri sono uguali, quindi $1 = 2 = 3 = \ldots$

II. Sempre supposto $a = b$, sarà $a - b = a^n - b^n$ e di conseguenza

$$a - b = (a - b)(a^{n-1} + b\,a^{n-2} \ldots + b^{n-1})$$

Dividendo ambo i membri per $a - b$, e sostituendo al posto di b il suo eguale a, abbiamo:

$$1 = n\,a^{n-1}$$

(*) Luigi Conte. *Un sofisma matematico* $n! = 2^{n-1}$. *Rassegna* A. VI, N. 8-9.

Digitized by Google

ovvero

$$\frac{1}{n} = a^{n-1}$$

cioè

1°) L'inverso di un numero si può porre sempre sotto forma di potenza di un numero intero con esponente intero.

2°) L'inverso di un numero intero è un altro numero intero.

III. Facciamo dei casi particolari. Poniamo nella formula precedente $n = 3$, avremo

$$\frac{1}{3} = a^3$$

per $n = 4$ avremo

$$\frac{1}{4} = a^4$$

Sicchè supposto a intero, potremo concludere che

3°) Le unità frazionarie sono dei numeri interi.

Elena, 30 novembre 1926.

LEONARDO VINCIANI.

QUESTIONI DIDATTICHE.

Ancora sui temi di matematica assegnati agli esami di stato nel 1925.

Nel N. 4-5 della *Rassegna* (aprile-maggio 1926) pubblicai alcune osservazioni intorno ai temi di matematica assegnati agli esami di stato nel 1925.

Aggiungo ora il tema assegnato alla maturità scientifica nel luglio 1925:

In un cilindro circolare retto di raggio r e altezza h è descritta, col centro O sull'asse del cilindro e col medesimo raggio r, una sfera che si suppone non abbia punti esterni al cilindro. Si vuole che il volume della sfera risulti medio proporzionale fra i volumi dei due solidi rotondi che sommati alla sfera danno il cilindro.

Digitized by Google

1) *Si determini a quale distanza da una delle basi del cilindro va preso il centro O della sfera.*

2) *Si considerino i due casi particolari* $h = 4r$ $h = 7r$, *calcolando in ciascuno di essi i volumi dei due solidi rotondi suindicati.*

3) (*facoltativo*) *Tenendo presente la condizione di realtà delle soluzioni e la condizione esplicita aggiunta che la sfera abbia i suoi punti interni o non esterni al cilindro, si dimostri che, per ogni r assegnato, h si deve supporre prefissalo in modo da soddisfare alle limitazioni.*

$$4r \leq h \leq 7r.$$

Questo tema, il cui enunciato non potrebbe essere più chiaro, non ha bisogno per la risoluzione di speciali artifici; si perviene facilmente all'equazione

$$3x^2 - 3hx + 2r(h + 2r) = 0.$$

Anche la terza parte, contenendo indicate le limitazioni alle quali si deve pervenire, può essere svolta senza incontrare gravi difficoltà.

L'enunciato preciso del tema assegnato alla maturità scientifica nell'ottobre 1925 era:

Determinare gli angoli acuti di un triangolo rettangolo ABC β *e* γ *in modo che sia*

$$p \operatorname{sen} \beta + q \operatorname{sen} \gamma = r,$$

dove p, q, r sono tre numeri dati reali e positivi.

Fissati p e q, con $p < q$, *fra quali limiti può variare r, affinchè il problema abbia soluzioni?*

Il candidato potrà assumere volendolo come incognita $x = tg \frac{\beta}{2}$.

È poi in sua facoltà di completare l'esercizio costruendo il triangolo rettangolo ABC di data ipotenusa $BC = a$, *i cui angoli acuti* β *e* γ *fanno assumere ad r (cioè a* $p \operatorname{sen} \beta + q \operatorname{sen} \gamma$) *il massimo valore di cui è suscettibile.*

Il tema, sotto questa forma, in confronto a quella pubblicata nel N. 4-5 della *Rassegna* dell'A. VI (1) (pag. 69), si presenta più semplice e contiene un avviamento alla risoluzione e alla discussione. Questa, data l'ipotesi che p, q, r siano reali e positivi con

(1) Nell'articolo « *Intorno ai temi...* » pubblicato nel fascicolo 4-5 della Rassegna dell'A. VI sono incorsi alcuni errori di stampa - quasi tutti di facile correzione alla prima lettura - e qualche lacuna. Ricordo, qui soltanto

Digitized by Google

$p < q$ e che q e b siano fissati, si riduce al caso *a*) (Cfr. pag. 70 loc. cit.). La condizione di realtà è

$$r \leq \sqrt{p^2 + q^2}.$$

I tre sottocasi

$$l \leq 1\,;\ m \leq 1 < l\,;\ 1 < m$$

diventano rispettivamente

$$r \leq p\,;\ p < r \leq q\,;\ q < r.$$

Si conclude che se r è compreso fra p e q si ha una soluzione accettabile; se invece

$$\sqrt{p^2 + q^2} > r > q$$

si hanno due soluzioni accettabili.

Quanto all'ultima domanda, dalla condizione

$$r \leq \sqrt{p^2 + q^2},$$

si trae subito, senza incomodare le derivate, che il massimo valore di r è

$$\sqrt{p^2 + q^2}$$

e quindi gli angoli β e γ sono in tal caso quelli del triangolo rettangolo di cateti p e q.

Lo stesso problema può essere trattato geometricamente e a tal riguardo pubblico la seguente elegante risoluzione che mi ha

---

che *a pag. 70 sinistra riga 18ª dal basso*, anzichè «*del cerchio*» deve leggersi «*del centro del cerchio*»;

a pag. 70 destra dopo la riga 18ª dall'alto deve aggiungersi:

Analiticamente i tre casi sono rappresentati da tre facili figure in cui la retta

$$\frac{x}{l} + \frac{y}{m} = 1$$

è secante rispetto al cerchio

$$x^2 + y^2 = 1$$

ma ha i punti d'incontro cogli assi coordinati interni al cerchio (1° caso) o *uno interno e uno esterno* (2° caso) o *tutti e due esterni* (3° caso);

a pag. 71 destra a fianco della discussione il lettore deve disegnare tre parabole colla concavità verso l'alto: nel primo caso la parabola incontra l'asse x in due punti, nel cui intervallo restano compresi i punti O e 1; nel secondo caso il punto 1 è esterno a detto intervallo; nel terzo caso detto intervallo è tutto interno all'intervallo (o; 1).

Digitized by Google

comunicato il collega prof. *Ciamberlini* e che sfugge alla risoluzione algebrica:

Il problema richiede in sostanza di
costruire un quadrangolo inscrittibile ABCD, essendone dati due lati opposti $AB = p$, $CD = q$, *una diagonale* $AC = r$ *e sapendo che le diagonali sono perpendicolari tra loro* (1).

Supposto per il momento già costruito il quadrangolo ABCD inscritto nella circonferenza di centro O e indicato con M l'altro estremo del diametro passante per A, essendo

$$\overset{\frown}{AB} + \overset{\frown}{CD} = 1 \text{ semicirconferenza,}$$

si ricava

$$\overset{\frown}{CD} = \overset{\frown}{BM}$$

e perciò

$$\overline{BM} = \overline{CD} = q$$

e quindi il cerchio O è quello circoscritto al triangolo rettangolo ABM di cateti p e q e il suo diametro

$$AM = \sqrt{p^2 + q^2}.$$

Da questa *breve analisi* risulta che per costruire il quadrangolo ABCD (cioè per avere l'angolo β e quindi il suo complemento γ) basterà circoscrivere al triangolo ABM rettangolo in B e di cateti p e q il cerchio; condurre in questo la corda $AC = r$ (2); condurre poi BE perpendicolare ad AC; se D è l'altro punto d'incontro di BE colla circonferenza, sarà ABCD il quadrangolo richiesto e $A\hat{B}E$ eguale all'angolo richiesto β.

Infatti risulta subito

$$\overline{CD} = q \; ; \; \overline{AE} = p \operatorname{sen} \beta \; ; \; \overline{EC} = q \cos \beta$$

e quindi

$$p \operatorname{sen} \beta + q \cos \beta = r.$$

Per la possibilità del problema occorre anzitutto che la corda AC sia minore o eguale al diametro AM ossia

$$r \leq \sqrt{p^2 + q^2} \text{ ecc.}$$

Al massimo di r corrisponde il triangolo rettangolo ABM e

(1) Il lettore è pregato di costruire la figura.

(2) La discussione del problema è fondata appunto sulla ricerca del numero dei *punti utili* d'incontro della circonferenza O con quella di centro A e raggio $AC = r$.

Digitized by Google

quindi si costruisce subito il triangolo rettangolo d'ipotenusa a e i cui angoli acuti fanno assumere alla somma

$$p \operatorname{sen} \beta + q \cos \beta$$

il valore massimo: tale triangolo è simile ad ABM.

Roma, settembre 1926.

ATTILIO GASPARINI.

LIBRI RICEVUTI

ACADEMIA *pro interlingua* - Praes. G. **PEANO** - Revista - A. 1926 N. 1 a 6 — A. 1927, N. 1.

BERTI GIOVANNI - *Teoria dei logaritmali* - Coop. Tip. Azzognidi - Bologna, 1926. L'A. propone un nuovo simbolo per l'indicazione dell'estrazione del logaritmo, analogo a quello dell'estrazione di radice (cioè, è lo stesso ma rovesciato); riesce così a dare un assetto formale e di analogia alla teoria dei logaritmi e ne dimostra i vantaggi nel calcolo algebrico. La cosa ci sembra così interessante che invitiamo i lettori della R. a leggere questo libretto per occuparsi della questione (R).

BUFFA PIETRO - *Idealità del metodo attivo* - Estr. dalla *Rivista Pedagogica* - A. XIX. Fasc. 6-7, 1926.

CAMPEDELLI LUIGI - *Un teorema di Napoleone.* - Estr. dalla *Rivista di matematica pura ed applicata.* A. I - N. 7-8 1926.

CATTANEO PAOLO - 1) *Dieci lezioni sulla divisibilità*, Ed. R. Zannoni - Padova, 1924 - 2) *Elementi di Geometria analitica*, Ed. R. Zannoni - 3) *Elementi di analisi infinitesimale*, Ed. R. Zannoni - Se non fossi costretto alle poche linee concessemi vorrei descrivere queste operette 2) e 3), che mi hanno subito convinto come argomenti di matematica superiore, possano essere trattati con chiarezza, semplicità, rigore e resi adatti all'intelligenza degli ultimi anni delle scuole medie. Addito agli Insegnanti il 2) che sarà loro utilissimo ora che in molti ordini di scuole medie si deve trattare delle coord. cartesiane e delle applicazioni loro alla rappresentazione delle curve ecc. Notiamo anche che nel 3) oltre alle definizioni e

Digitized by Google

alle proprietà fondamentali di derivazione e di integrazione (trattate algebricamente e geometricamente) e ad applicazioni di massimi e minimi, alle misure, alle quadrature ecc., è contenuto un rapido sguardo sul calcolo combinatorio, sui limiti, sulle funzioni, sulle serie; ed è specialmente in queste parti difficili agli allievi per la loro aridità, dove l'A. ha mostrato maggiormente la sua abilità di trattazione elementare. (s. t.)

CAVALLARO VINCENZO G. - *Nuove ricerche sulla genesi della sezione aurea* - Estr. del *Bollettino di matematica*. A. 1926, N. 2-3 - 2) *Sulla vicendevole dipendenza dei metodi fondamentali della trisezione dell'angolo.* - Estr. dal *Periodico di Matematica*, A. 1926. N. 3 - 3) *Fattoriale del triangolo e dei poligoni.* Id. id. N. 5.

CARVANDOLI LUDOVICO - *La poblaciòn y la reparticiòn de la riqueza.* Ed. Inboden de la Rev. *Prometeo.* Quad. N. 2, 1926 - *Paranà.*

DOPOLAVORO (Il) - Settimanale. A. IV (1926) Roma.

MACCAFERRI EUGENIO - *La teoria della livella torica.* Estr. dall'An.rio del R.o Ist. tecn. di Ascoli Piceno, Vol. I, 1926.

NIEUW ARCHIEF *voor wiskunde* - Tweede reeks - Deel XV - Tweede stuk - Groningen 1926.

PONZINIBIO LUIGI - *Complementi di algebra* (ad uso dei licei scientifici) - Ed. Sandron, 1926. Siamo lieti che la R. ci abbia dato l'incarico di annunziare ai suoi lettori questo libro, perchè lo abbiamo letto con molto piacere. Il programma dei complementi di algebra (l'A. suppone che nei primi corsi gl'insegnanti abbiamo svolto l'algebra, la Geometria e la Trigonometria, e destina il trattato al quarto corso) è sviluppato con sano discernimento nella scelta e nella proporzione degli argomenti e con un rigore perfettamente adatto alle giovani menti a cui è dedicato. Le nozioni e le dimostrazioni vi sono esposte con uniforme chiarezza; così possiamo dire che l'allievo studioso con questo trattato non ha quasi bisogno dell'insegnante che come guida (eccetto nell'ultimo capitolo, in alcuni punti troppo rapido, perchè l'A. suppone che per mancanza di tempo difficilmente sarà svolto). Nel I capitolo trovansi le proprietà dei numeri interi (divisibilità; congruenze, teoremi del Fermat, del Wilson ecc.); nel II l'analisi indeterminata di 1° grado, nel III l'analisi combinatoria, binomio ecc., nel IV i massimi e minimi con l'algebra elementare, nel V le definizioni e le operazioni sui limiti con la rappresentazione grafica del-

Digitized by Google

le funzioni, nel VI le derivate delle funzioni, nel VII di nuovo i massimi e minimi con le derivate, nell'VIII l'andamento delle curve algebriche, nel IX le nozioni di integrale con applicazioni geometriche e fisiche (*n. b.*)

PROMETEO - Revista mensual de Ciencias, artes y educación. A. V. N.° 55 a 61, 1926. Paranà (Argentina).

RASSEGNA DI CULTURA - Circolo filologico milanese - A. IV. Numeri da luglio a dicembre 1926.

REVISTA UNIVERSITARIA - A. II. N. 13-14, 1926 - Paranà (Argentina).

REVUE SEMESTRIELL E *des publications mathématiques* Tome XXXII. Partie I (Oct. 1924 - Avr. 1925); P. II (Avr. 1925 - Oct. 1925). Groningen 1927.

RIVISTA D'AMMINISTRAZIONE E FINANZA - A. XXIV. (1926) - Milano.

RIVISTA ITALIANA DI RAGIONERIA - A. XIX (1926) - Serie II - N. 6 a 12 - A. XX (1927). N. 1, 2 - Roma.

SITZUNGSBERICHTE *der preussischen Akademie der Wissenschaften*, 1926 (XII a XXXIII) Berlino.

STUDIUM - *Rivista universitaria* A. XXII - N. 11, 12 - 1926. Roma.

TRANSACTIONS *of the American mathematical Society* - New York - April, July, October 1926 - January 1927.

VOLTIANA - A. I. (1926) Como.

WISKUNDIGE OPGAVEN *met de oplossingen* - Veertiende deel Terste stuk Groningen 1926.

Direzione ed Amministrazione: **Istituto G. Ferraris** — Roma.
Direttore responsabile: Prof. Enrico Gradara.

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore - *Città di Castello* - 1927.

Digitized by Google

Digitized by Google

ARCHIMEDE

IL METODO

Quest'opera di *Archimede*, l'ultima scoperta, tradotta per la prima volta in italiano è corredata di numerose note esplicative, critiche, storiche e di citazioni, da una prefazione e da una tavola delle figure.

Indice della prefazione. 1° Ragione della traduzione. 2° Le opere di Archimede. 3° La scoperta del *Metodo.* 4° Il contenuto del *Metodo.* 5° Le traduzioni del *Metodo.*

Indice del Metodo: Introduzione. Lemmi. 1° Area del segmento di parabola. 2° Volume della sfera. 3° Volume dell'ellissoide. 4° Volume del segmento di paraboloide. 5° Centro di gravità del segmento di paraboloide. 6° Centro di gravità dell'emisfero. 7° Volume del segmento di sfera. 8° Volume del segmento di ellissoide. 9° Centro di gravità del segmento di sfera. 10° Centro di gravità del segmento di ellissoide. 11° Volume e centro di gravità del segmento di iperboloide. 12° Volume di un particolare segmento di cilindro P. I 13° *Id. id.* P. II. 14° *Id. id.* Dimostrazione con la parabola ausiliaria 15° *Id. id.* Dimostrazione geometrica.

Inviare cartolina vaglia di **L. 6** al **Prof. ENRICO GRADARA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris***, Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore

(Perugia) CITTA' DI CASTELLO (Perugia)

Esecuzione accurata ed elegante di qualsiasi genere di lavoro tipografico di lusso e commerciale: Libri - Opuscoli - Riviste - Giornali - Cartoline illustrate ed illustrazioni - Carte intestate - Buste - Biglietti - Modelli - Registri - Libretti Colonici - Partecipazioni di lutto e di nozze, ecc.

Avendo l'azienda carattere di Scuola per orfani e non scopo di lucro, è in grado di praticare prezzi modicissimi.

Digitized by Google

COLLABORATORI

E. ALLARA — A. ANTONELLI — G. APRILE — E. ARTOM — P. BARTOLI — P. BENEDETTI — G. BEMPORAD — A. BERNINI — A. BARTORELLI — F. BERIO — U. BINI — U. CASSINA — P. CATTANEO — G. V. CAVALLARO — E. CAVALLI — F. CHIAPPETTI — C. CIAMBERLINI — A. CIANFLONE — U. CRUDELI — A. COLA — S. COMPOSTO — L. CONTE — M. DEL GIUDICE — L. DELLA CASA — G. DELITALA — G. DE STEFANO — L. DI LAZZARO — S. ENA — G. FAVARO — M. FRAILIK — O. FRANCESCHI — M. FRITZSCHE — A. FONTANA — R. GALLONI — A. GANDINI — A. GASPARINI — F. GIUDICE — V. GRADARA ENA — U. GRASSI — G. LACCA — P. LANZAVECCHIA — R. LEONARDI — M. LEONCINI — V. MARSEGUERRA — E. MACCAFERRI — A. MARENGONI — M. MIGLIO — G. MIRTO — M. MIRTO — U. MONETTI — A. NATUCCI — A. NEPPI — A. PADOA — P. PANICHI — G. PEANO — N. PELLEGRINI — P. PENNA — R. PISCEL — G. QUAGLIA — N. RICCI CARTOM — F. RIMONDINI — G. SABINI — U. SALINI — A. SALMOIRAGHI — A. SCALA — P. SCATIZZI — A. SCHOR — F. SIBIRANI — N. SIRACUSANO — G. SPINA — D. SPANO — L. TENCA — S. TOSCANO — G. VICI — E. VIGLEZIO — L. VINGIANI — G. VITALI.

AVVERTENZA AI COLLABORATORI

La Rassegna *dedicherà l'ultimo dei fascicoli della presente annata alla commemorazione di* **Alessandro Volta**; *tutti i collaboratori che desiderano partecipare ad essa con scritti sulla vita e sull'opera dell'inventore della pila sono pregati di inviare gli articoli prima del 30 settembre.*

Rassegna di Matematica e Fisica

Annate: I (1920-21) — II (1921-22): — III (1922-23): — IV (1923-24) — V (1924-1925): — VI (1926).

Ciascun volume con frontespizio e indici . . . . . L. **30**

Un fascicolo separato . . . . . L. **4**

Agli abbonati, librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento.

Inviare cartolina vaglia al **Prof. MARCELLO PUMA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris,*** Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Digitized by Google

724 11.076

Anno VII - N. 7-8 Luglio-Agosto 1927

RASSEGNA

DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA

SOMMARIO

ODOARDO FRANCESCHI: Sopra una certa trasformazione birazionale dello spazio a 4 dimensioni.

FRANCESCO GIUDICE: Problema del biliardo circolare.

ALPINOLO NATUCCI: La classificazione delle scienze fisico-chimiche e naturali.

Note didattiche — Sul problema della sezione aurea (PIETRO PANICHI). — La legge di Boyle-Mariotte e la legge di Avogadro (ARNALDO CAPPELLONI) — Moto circolare uniforme e moto oscillatorio (ARDICCIO MARENGONI).

ABBONAMENTO ANNUO:

ITALIA. . . L. 20 — ESTERO. . . L. 25

Inviare l'importo all'Amministrazione

Piazza di Spagna, 35 ROMA (6)

ROMA

Direzione e Amministrazione:

Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

ANNO VII

(1297)

DELLA

Rassegna di Matematica e Fisica

Abbonamento all'anno VII: Italia L. 20 - Estero L. 25

Un numero separato dell'anno VII: Italia L. 3 - Estero L. 3,50

ai librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento

inviare cartolina vaglia al

Prof. MARCELLO PUMA

Istituto G. Ferraris - Piazza di Spagna, 35 - Roma (6)

---

*A coloro che ci invieranno in una sola volta l'importo di 5 nuovi abbonamenti si concederà l'***abbonamento gratuito.**

La corrispondenza con la Rassegna deve essere inviata all'indirizzo:

Direzione della Rassegna - Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna 35 - Roma (6)

N.B. *Per avere pronta risposta occorre inviarne l'affrancatura in francobolli.*

VITA NUOVA

ABBONAMENTO ANNUO L. 2

Dirigere vaglia

ISTITUTO " G. FERRARIS „

Piazza di Spagna 35 - ROMA (6)

Digitized by Google

Sopra una certa trasformazione birazionale dello spazio a 4 dimensioni

DI

ODOARDO FRANCESCHI.

In un lavoro pubblicato nel Giornale di Matematiche (anno 1927) che porta il titolo " *Studio di una particolare trasformazione cremoniana dello spazio a 4 dimensioni* „ mi sono occupato di una particolare trasformazione cremoniana dello spazio a 4 dimensioni che ammette come fondamentale semplice una linea (iperspaziale), la cui proiezione nello spazio ordinario è la linea (gobba) $^{m(m-1)}C$, assunta dal Sig. De' Paolis come fondamentale semplice per un sistema omaloidico monoidale di superfici dell'ordine m, nella Memoria " *Sopra un sistema omaloidico formato da superficie di ordine n con un punto* $(n-1)$*-plo* „ (Giornale di Matematiche, Vol. XIII (1875); mi propongo ora di studiare la trasformazione birazionale dell'S_4 di cui è dato, come superficie fondamentale semplice, un cono che ammette la $^{m(m-1)}C$, come sezione spaziale. — Farò uso di notazioni analoghe a quelle adoperate dal De' Paolis.

1. — Dati nello spazio ordinario $x_5 = 0$, appartenente ad uno spazio a 4 dimensioni $S_4 \equiv (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$, i due monoidi

$$M_4 \equiv x_4 \varphi_{m-1}^{(x)} + \varphi_m^{(x)} = 0, \qquad M \equiv x_4 \varrho_{m-2}^{(x)} + \varrho_{m-1}^{(x)} = 0,$$

$\varphi_i^{(x)}$, $\varrho_j^{(x)}$ indicando forme di ordini rispettivi i, j in x_1, x_2, x_3, si stabilisce fra gli spazî $x_5 = 0$ ed $x'_5 = 0$, il secondo dei quali appartiene ad un iperspazio $S'_4 \equiv (x'_1, x'_2, x'_3, x'_4, x'_5)$ la trasformazione cremoniana monoidale:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 = x_1 : x_2 : x_3 : \frac{M_4}{M},$$

la quale ammette come fondamentale semplice la linea $^{m(m-1)}C \equiv \equiv P^{(m-1)(m-2)}$, essendo $P \equiv (x_1 = x_2 = x_3 = 0)$ definita in $x_5 = 0$ da $M = M_4 = 0$.

Digitized by Google

Se in $x_5 = 0$ si assume una quadrica $\Phi_5 \equiv \varphi_2(x) = 0$, dove $\varphi_2(x)$ denota una forma quadratica in x_1, x_2, x_3, x_4 dalle ipersuperfici:

$$x_1 x_5 M = x_2 x_5 M = x_3 x_5 M = x_5 M_4 = \Phi_5 . M = 0$$

risulta determinato in S_4 un sistema omaloidico monoidale di ipersuperfici, il quale definisce la trasformazione data dalle formule:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_1 : x_2 : x_3 : \frac{M_4}{M} : \frac{\Phi_5}{x_5},$$

ossiá:

$$x'_1 : x'_2 : x'_3 : x'_4 : x'_5 = x_1 x_5 M : x_2 x_5 M : x_3 x_5 M : x_5 M_4 : \Phi_5 . M.$$

Le formule della trasformazione inversa si scrivono:

$$x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5 = x'_1 x'_5 M'^2 : x'_2 x'_5 M'^2 : x'_3 x'_5 M'^2 : x'_5 M' M'_4 : \Phi'_5;$$

dove si è posto:

$$M' \equiv x'_4 \varrho^{(x')}_{m-2} - \varphi^{(x')}_{m-1}, M'_4 \equiv -x'_4 \varrho^{(x')}_{m-1} + \varphi^{(x')}_m, \Phi'_5 \equiv \varphi_2(x'_1 M', x'_2 M', x'_3 M', M'_4 \equiv \varphi_{2m}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4),$$

dove $\varphi^{(x')}_i$, $\varrho^{(x')}_j$ denotano le forme che si ottengono sostituendo nelle $\varphi^{(x)}_i$, $\varrho^{(x)}_j$ alle x_1, x_2, x_3 le x'_1, x'_2, x'_3 e $\varphi_{2m}(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4)$ indica una forma di grado $2m$ nei relativi argomenti.

2. — Il cono quadrico $\Phi_5 = 0$, associato al cono $M = 0$, dà la ipersuperficie del sistema omaloidico definito in S_4 là quale corrisponde all'iperpiano $x'_5 = 0$; il cono di ordine $2m$, rappresentato da $\Phi'_5 = 0$, dà la ipersuperficie del sistema analogo di S'_4 che corrisponde all'iperpiano $x_5 = 0$; due ipersuperfici generiche appartenenti ai sistemi medesimi sono date rispettivamente da:

$$(1) \quad \{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) M + \lambda_4 M_4\} \{x_5 + \lambda_5 \Phi_5 M = 0$$

$$(2) \quad \{(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3) M' + \lambda_4 M'_4\} \{x'_5 M' + \lambda_5 \Phi'_5 = 0,$$

le λ denotando delle indeterminate. Dunque:

I sistemi omaloidici definiti negli spazî S_4 ed S'_4 sono formati da monoidi di vertici 0 ed 0' $\equiv (x'_1 = x'_2 = x'_3 = x'_4 = 0)$, di ordini $m + 1$ e $2m$ rispettivamente.

I sistemi stessi ammettono i punti 0 ed 0' come rispettivi punti fondamentali, e sono rappresentati dalle (1), (2) al variare dei parametri.

3. — La intersezione di due ipersuperfici generiche del sistema definito in S_4 si compone delle superfici:

Digitized by Google

$$\Phi_5 \cdot M = x_5 = 0,$$

$$\begin{cases} \{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) M + \lambda_4 M_4\} x_5 + \lambda_5 \Phi_5 \cdot M = 0 \\ (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) M + \mu_4 M_4 \qquad\qquad = 0; \end{cases}$$

le λ_i , μ_j denotando parametri: la prima è una *superficie fondamentale* del sistema (1), ed è una superficie ${}^{m+1}\Sigma$ dello spazio ordinario, la quale si spezza nella quadrica ${}^{2}\Sigma$, data da $\Phi_5 = x_5 = 0$, e nel monoide ${}^{m-1}M$, di vertice P, dato da $M = x_5 = 0$, intersecantisi lungo la linea gobba $\Phi_5 = M = x_5 = 0$, di ordine $2(m-1)$ (linea doppia); la seconda si spezza in una parte fissa costituita dal cono iperspaziale ${}^{m(m-1)}K$, di vertice 0, rappresentato da $M = M_4 = 0$, che è *la superficie fondamentale data*, e in una parte variabile che è una superficie iperspaziale ${}^{2m}S \equiv 0^m$, razionale, appartenente ad un sistema lineare ∞^6, projettivo al sistema dei piani di S'_4.

La ${}^{m(m-1)}C$, completa intersezione del cono ${}^{m(m-1)}K$ collo spazio ordinario $x_5 = 0$, appartiene alla falda ${}^{m-1}M$ della ${}^{m+1}\Sigma$.

La intersezione di tre ipersuperfici generiche del sistema è formato dalle superfici fondamentali ${}^{m+1}\Sigma$ ed ${}^{m(m-1)}K$ e dalla linea:

$$\begin{cases} \{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3) M + \lambda_4 M_4\} Y_5 + \lambda_5 \Phi_5 M = 0 \\ (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_2 x_3) M + \mu_4 M_4 \qquad\qquad = 0 \\ \nu_1 x_1 + \nu_2 x_2 + \nu_3 x_3 \qquad\qquad = 0 \end{cases}$$

le λ_i , μ_j , ν_k denotando parametri; la quale si spezza nel sistema di $2m-1$ rette uscenti dal punto 0, una (la retta $x_1 = x_2 = x_3 = 0 (OP)$) $(m-1)(m-2)$-*pla*, fissa, le rimanenti semplici, variabili, appartenenti tutte al cono ${}^{m(m-1)}K$, e in una linea razionale ${}^{2m}L$, variabile, la quale passa per 0 con m rami; la linea composta del sistema delle $2(m-1)$ generatrici variabili del cono ${}^{m(m-1)}K$ e della curva ${}^{2m}L$, appartiene ad un sistema lineare ∞^6, projettivo al sistema delle rette di S'_4, ed è una ${}^{2(2m-1)}L \equiv 0^{3m-2}$; la retta contata $(m-1)(m-2)$ volte OP è una *linea fondamentale* $\Lambda^{(m-1)(m-2)}$, appartenente al cono fondamentale ${}^{m(m-1)}$K, e appoggiata alla ${}^{m(m-1)}$C nel punto P.

Una ${}^{2m}L$ (una ${}^{2m}S$) interseca una ipersuperficie del sistema omaloidico, che non la contenga, in un solo punto variabile (in una curva razionale variabile di ordine $2m(m+1)$); due ${}^{2m}S$ si intersecano in un solo punto. Una ${}^{2(2m-1)}L$ interseca la ${}^{m(m-1)}C$ in gruppo di $2(m-1)$ punti variabili, dati dalle intersezioni, collo spazio ordinario $x_5 = 0$, delle $2(m-1)$ generatrici variabili del cono

Digitized by Google

$^{m(m-1)}K$ che ad essa appartengono, e la quadrica (fondamentale) $^{2}\Sigma$ in un gruppo di $2m$ punti variabili. Una ^{2m}S interseca la $^{2}\Sigma$ secondo una linea $^{2m}L_1$ data dal sistema:

$$\begin{cases} \Phi_5 = x_5 = 0 \\ (\mu_1 x_1 + \mu_2 x_2 + \mu_3 x_3) M + \mu_4 M_4 = 0 . \end{cases}$$

variabile in un sistema lineare ∞^3, projettivo al sistema degli iperpiani di S'_4 passante per O'.

Il cono $^{m(m-1)}K$ è intersecato dal monoide ^{m-1}M secondo la $^{m(m-1)}C$, e dalla quadrica $^{2}\Sigma$ secondo un gruppo di $2m(m-1)$ punti fissi, il quale rappresenta la intersezione della $^{2}\Sigma$ colla $^{m(m-1)}C$ e del cono $M_4 = 0$ colla linea doppia della superficie fondamentale $^{m+1}\Sigma$.

4. — La intersezione di due ipersuperfici generiche del sistema definito in S'_4 si compone delle superfici:

$$\begin{cases} x'_5 M' = \Phi'_5 = 0 \\ \{(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3) M' + \lambda_4 M'_4\} \; x'_5 M' + \lambda_5 \Phi'_5 = 0 \\ \mu_1 x'_1 + \mu_2 x'_2 + \mu_3 x'_3) M' + \mu_4 M'_4 \qquad\qquad = 0 , \end{cases}$$

le λ_i , μ_j avendo i significati già convenuti. La prima è la *superficie fondamentale*, e si spezza nella parte $x'_5 = \Phi'_5 = 0$, che, come si vede tenendo conto della espressione di Φ'_5 data al n. 1, è una superficie $^{2m}\Sigma'$ dello spazio ordinario, passante con $2(m-1)$ falde per il punto $P' \equiv (x'_1 = x'_2 = x'_3 = x'_5 = 0)$, e nella parte residua $M' = \Phi'_5 = 0$ che si riduce al cono iperspaziale $^{m(m-1)}K'$ di vertice O', dato da $M' = M'_4 = 0$, contato due volte; la intersezione delle due falde è costituita dalla lineà doppia gobba $x_5 = M' = M'_4 = 0$, che è una $^{m(m-1)}C'^{2} \equiv P'^{2(m-1)(m-2)}$. La seconda si spezza nel cono $^{m(m-1)}K'$, contato due volte, e in una parte variabile, che è una superficie razionale $^{2m}S' \equiv O'^{m}$, appartenendo ad un sistema lineare ∞^6, proiettivo al sistema dei piani di S_4.

La intersezione di tre ipersuperfici generiche del sistema è formata dalla superficie fondamentale, di cui la falda $^{m(m-1)}K'$ deve contarsi quattro volte, e dalla linea:

$$\begin{cases} \{(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3) M' + \lambda_4 M'_4\} \; x'_5 M' + \lambda_5 \Phi'_5 = 0 \\ (\mu_1 x'_1 + \mu_2 x'_2 + \mu_3 x'_3) \; M' + \mu_4 M'_4 \qquad\qquad = 0 \\ \nu_1 x'_1 + \nu_2 x'_2 + \nu_3 x'_3 \qquad\qquad = 0 , \end{cases}$$

le λ_i , μ_j , ν_k avendo gli stessi significati che al n. precedente, la quale si spezza nel sistema di $2m-1$ rette uscenti dal punto O',

Digitized by Google

una (la retta $(O'P')$ $2(m-1)(m-2)$-*pla*, fissa, le rimanenti doppie, variabili, appartenenti al cono ${}^{m(m-1)}K'^{2}$, e in una linea razionale ${}^{2m}L' \cong O'^{m}$; la linea composta del sistema delle $2(m-1)$ generatrici variabili del cono e della curva ${}^{2m}L'$, è una ${}^{2(3m-2)}L' \equiv \equiv O'^{5m-4}$, ed appartiene ad un sistema lineare ∞^6, projettivo al sistema delle rette di S_4. La retta $O'P'$ contata $2(m-1)(m-2)$ volte, è una *linea fondamentale* ${}^{2(m-1)(m-2)}\Lambda'$ appartenente al cono fondamentale ${}^{m(m-1)}K'^{2}$ e appoggiata alla ${}^{m(m-1)}C'^{2}$ nel punto P'.

Per quanto riguarda le mutue, intersezioni delle varietà di S'_4 si hanno fenomeni analoghi a quelli che si presentano per le varietà di S_4; l'ordine della linea razionale, intersezione di una superficie ${}^{2m}S'$ con una ipersuperficie generica del sistema omaloidico di S'_4, è $4m^2$. Una ${}^{2(3m-2)}L'$ interseca la ${}^{m(m-1)}C'^{2}$ in un gruppo di $2(m-1)$ punti doppî variabili, intersezioni, collo spazio ordinario $x'_5 = 0$, delle $2(m-1)$ genitrici (doppie) variabili del cono ${}^{m(m-1)}K'^{2}$ che ad essa appartengono, e la falda ${}^{2m}\Sigma'$ della superficie fondamentale in un gruppo di $2(2m-1)$ punti variabili contenente il precedente. Una ${}^{2m}\varphi'$ interseca la falda ${}^{2m}\Sigma'$ della superficie fondamentale secondo una linea gobba ${}^{2m}L'_1 \equiv P'^{2(m-1)}$ appartenenti ad un sistema lineare ∞^3, projettivo al sistema degli iperpiani di S_4 passanti per 0.

5. — La ipersuperfice Jacobiana del sistema (1) è data da:

$$x^3_5 M^3 \Phi_Q \Phi_5 = 0,$$

dove si è posto: $\Phi_Q \equiv \varphi_m^{(x)} \varrho_{m-2}^{(x)} - \varphi_{(m-1}^{(x)} \varrho_{m-1}^{(x)}$; quindi è una ipersuperficie ${}^{5m}I$, la quale si spezza nello spazio ordinario $x_5 = 0$, contato 3 volte nei coni $M = 0$ e $\Phi_5 = 0$, il primo contato tre volte e il secondo una volta, e nel cono semplice $\Phi_5 = 0$, il quale si spezza nel sistema di $2(m-1)$ iperpiani passanti per la retta OP (come si vede subito segandolo con un iperpiano per la retta stessa), e contiene il cono ${}^{m(m-1)}K$.

Il punto fondamentale 0 appartiene all'Jacobiana come punto $(5m-3)$-*plo*; la superficie fondamentale ${}^{m+1}\Sigma$, come superficie quadrupla, e precisamente: la falda data dalla quadrica ${}^{1}\Sigma$, come superficie quadrupla, la falda data dal monoide ${}^{m-1}M$, come superficie sestupla; il cono fondamentale ${}^{m(m-1)}K$, come superficie quadrupla. Le linee (fondamentali) OP ed ${}^{m(m-1)}C$ fanno parte dell'Jacobiana cogli ordini di moltiplicità rispettivi $5m-8$ e 7; il punto P vi appartiene come punto $5(m-1)$-*plo*.

Digitized by Google

La ipersuperficie Jacobiana del sistema (2) è data da:

$$x'^{3}_{5}\, M'^{13}\, \Phi'_{\varrho}\, \Phi'_{5} = 0\,,$$

dove si è posto:

$$\Phi'_{\varrho} \equiv \varphi^{(x')}_{m}\, \varrho^{(x')}_{m-2} - \varphi^{(x')}_{m-1}\, \varrho^{(x')}_{m-1}\,;$$

quindi è una ipersuperficie ${}^{7m-2}I'$, la quale si spezza nello spazio ordinario $x'_5 = 0$, contato 3 volte, nei coni $M' = 0$ e $\Phi'_5 = 0$, il primo contato 3 volte e il secondo una volta, e nel cono semplice $\Phi'_{\varrho} = 0$, il quale si spezza nel sistema di $2(m-1)$ iperpiani passanti per la retta $O'P'$ e contiene il cono ${}^{m(m-1)}K'$.

Appartengono all'Jacobiana, il punto fondamentale O', come punto $(7m-5)$-*plo*; la superficie fondamentale, come superficie quadrupla, e precisamente: la falda ${}^{2m}\Sigma'$, come superficie quadrupla, e il cono ${}^{m(m-1)}K'$, come superficie sestupla. Le linee (fondamentali) $O'P'$ ed ${}^{m(m-1)}C'$ fanno parte dell'Jacobiana cogli ordini di moltiplicità rispettivi $7m-10$ e 9; il punto F' è per essa $5(m-1)$-*plo*.

(*Continua*).

Problema del biliardo circolare

DI

FRANCESCO GIUDICE.

1. È proposto da *Petersen* per il caso particolare di palle allineate col centro del biliardo (1). Consiste nel trovare dove si deve battere la sponda circolare d'un biliardo con la propria palla per colpire per riflessione quella dell'avversario. È risolubile elementarmente anche nel caso particolare di palle equidistanti dal centro del biliardo.

Faremo astrazione di impedimenti, birilli od altro, che possano ostacolare il movimento, ed enunceremo il problema geometricamente così: *essendo dati due punti P, Q internamente ad un*

(1) V. *Méthodes et Thèorie pour la résolution des problèmes de constructions géométriques* par Iulius Petersen, traduit par O. Chemin. Paris, *Gauthiers Villars*, 1880; pag. 15, ex. 55.

Digitized by Google

cerchio di centro C, trovare sulla circonferenza un punto M tale che il raggio MC dimezzi l'angolo PMQ.

Per tener presente lo scopo del problema diremo *sponda* la circonferenza, *punto da battere M* e *punto di partenza P*, considerando P e Q come punti di contatto del piano del biliardo con la palla di chi deve giocare e con quella dell'avversario.

2. *Palle allineate col centro.* Supponiamo che le palle siano allineate col centro, cioè che P e Q sian sopra un diametro; l'estremo di questo diametro più prossimo al punto di partenza P che al punto Q sia A e B sia l'altro estremo: si vede subito che si può battere A, ossia può prendersi A per punto M.

Vediamo se sulla circonferenza vi sia anche un qualche altro punto che si possa prendere per M; occorre intanto che C separi P e Q perchè vi possa essere sulla circonferenza un punto esterno alla retta AB e tale che MC dimezzi l'angolo PMQ; supponendo che un tal punto M vi sia, si tracci per esso la tangente alla circonferenza e sia C_1 il punto dove essa taglia la retta AB. Consideriamo il fascio $M(PQ\,CC_1)$; esso è armonico perchè l'angolo CMC_1 è retto ed MC dimezza l'angolo PMQ; C_1 è dunque coniugato armonico di C rispetto a P e Q: vedesi che, inversamente, se coniugato armonico di C rispetto a P e Q sia il punto C_1 esterno al diametro AB, allora può battersi anche il punto di contatto della sponda con sua tangente che passi per C_1.

Perchè si abbiano altre soluzioni, oltre di quella data dal punto A, è dunque necessario e sufficiente che sia esterno al diametro AB il coniugato armonico di C rispetto a P e Q; se questa condizione è verificata si hanno altre due soluzioni e precisamente per punto M da battere può prendersi ciascuno dei punti di contatto della sponda con le due tangenti condotte ad essa pel coniugato armonico del centro C rispetto a P e Q.

3. *Palle equidistanti dal centro.* Supponiàmo che le palle sian equidistanti dal centro del biliardo, cioè che P e Q siano sopra una circonferenza concentrica con la sponda; siano H ed I quei punti della sponda che sono equidistanti da P e dà Q. Si vede subito che si può battere tanto H quanto I ossia che ciascuno dei punti H, I della sponda si può prendere per punto M. Supponiàmo che siavi un altro punto M sulla sponda, tale dunque che MC dimezzi l'angolo PMQ: i due triangoli CMP, CMQ hanno comune il lato CM ed hanno uguali i lati CP, CQ e gli opposti angoli per cui hanno uguali o supplementari gli àngoli opposti a CM;

Digitized by Google

se fossero uguali, allora sarebbero uguali anche PM e QM per cui M sarebbe od H od I; saranno dunque supplementari, se M sia un nuovo punto, ed allora il quadrilatero $PCQM$, avendo angoli opposti supplementari, è inscritto nel cerchio dei tre punti C, P, Q; vedesi subito che, inversamente, se M sia un punto comune alla sponda e alla circonferenza CPQ, allora son uguali gli angoli PMC, CMQ per insistere su uguali archi della circonferenza CPQ nella quale sono inscritti.

Per l'esistenza di altre soluzioni, oltre di quelle date da H ed I, è dunque necessario e sufficiente che si taglino la sponda e la circonferenza CPQ; se questa condizione è soddisfatta, si hanno altre due soluzioni e precisamente per punto M può prendersi ciascuno dei punti d'intersezione della sponda con la circonferenza CPQ.

4. *Caso generale.* Supponiamo ora che le palle sian comunque poste, cioè che P e Q siano due punti qualunque interni al cerchio. Sia D uno dei punti d'intersezione della retta PC con la sponda: riferiamoci a due *assi cartesiani ortagonali d'origine C* prendendo per *asse x la retta PC* e per *unità il raggio CD*.

Indichiamo con F il punto comune alle rette PQ, CM e con G quello comune alla retta PQ ed alla tangente in M alla sponda; indichiamo con L la proiezione ortogonale di Q sull'asse x, con p ed l le ascisse di P e Q, con q l'ordinata di Q e con ξ, η le coordinate di M.

L'*equazione della retta CM*, essendo 0 e 0 le coordinate di C, ξ ed η quelle di M, è

$$\eta x - \xi y = 0$$

ed è *equazione normale* perchè

$$\xi^2 + \eta^2 = 1.$$

L'*equazione normale della retta MG*, perpendicolare in M alla retta CM, è

$$\xi x + \eta y - 1 = 0.$$

Se sono $\frac{n}{m}$ e $\frac{k}{h}$ il rapporto di PF ad FQ e quello di PG a GQ, le coordinate del punto F sono

$$\frac{mp + nl}{m+n}, \frac{nq}{m+n}$$

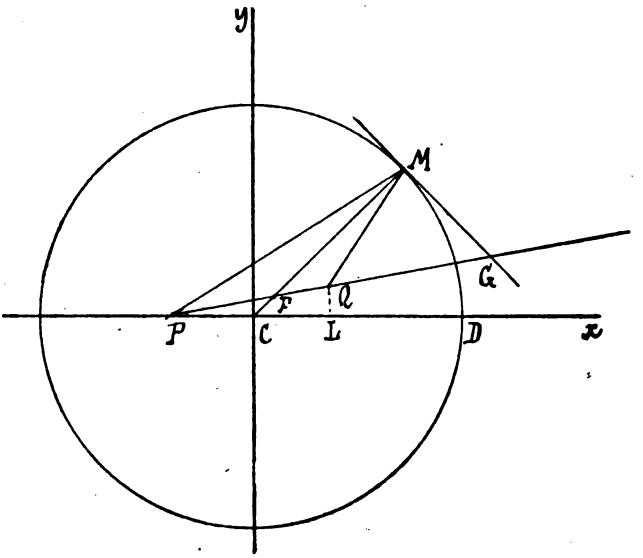
Digitized by Google

e quelle di G sono

$$\frac{hp+kl}{h+k}, \frac{kq}{h+k}.$$

Siccome F è sulla retta CM e G è sulla retta MQ,

$$\eta.(mp+nl)-\xi.nq=0$$
$$\xi.(hp+kl)+\eta.kq-(h+k)=0$$



da cui ricavasi che

$$\frac{m}{n}=\frac{q\xi-l\eta}{p\eta}, \frac{h}{k}=\frac{1-l\xi-q\eta}{p\xi-1}.$$

Siccome MC ed MG sono perpendicolari fra loro e dimezzano gli angoli delle rette MP ed MQ, i punti F e G sono coniugati armonici rispetto a P e Q per cui i rapporti $\frac{m}{n}$ ed $\frac{h}{k}$ hanno valori contrari cosicchè

$$p.(q\xi^2-2l\xi\eta-q\eta^2)-q\xi+(p+l)\eta=0.$$

Il *punto M da battersi* s'ottiene dunque per intersezione della circonferenza d'equazione

$$x^2+y^2=1$$

con la conica d'equazione

$$pqx^2-2plxy-pqy^2-qx+(p+l)y=0.$$

Questa conica è un'*iperbole equilatera* perchè la sua equazione relativa ad assi cartesiani ortogonali ha contrarii i coefficienti

Digitized by Google

di x^2 ed y^2 e *passa pel centro C*, punto di coordinate nulle. Il suo discriminante moltiplicato per 4, è

$$pq \cdot (l^2 + q^2 - p^2)$$

per cui essa è un'*iperbole degenere* cioè si scinde in due rette, quando e solo quando $pq = 0$, e allora P e Q sono sopra un diametro, oppure $l^2 + q^2 = p^2$, ed allora P e Q son equidistanti da C.

Si hanno dunque solo i *casi di risolubilità elementare* considerati in principio: si potrebbero ora ritrovare facilmente, per essi, le soluzioni già date con procedimento diretto.

Le *coordinate del centro dell'iperbole*, essendo date dalle equazioni

$$2pqx - 2ply - q = 0 \quad , \quad 2plx + 2pqy - (p + l) = 0 ,$$

sono $$\frac{l^2 + q^2 + pl}{2p \cdot (l^2 + q^2)} , \frac{q}{2 \cdot (l^2 + q^2)} .$$

Indichiamo con Q' il punto che è *inverso di Q* quando prendesi la sponda per cerchio di riflessione ed indichiamo le sue coordinate con l' e q'. Per essere inversi, relativamente alla sponda, Q e Q',

$$\frac{CQ}{CD} \cdot \frac{CQ'}{CD} = 1$$

e, per esser q e q' le ordinate degli stessi punti,

$$\frac{q}{q'} = \frac{CQ}{CQ'}$$

ossia, in causa dell'uguaglianza precedente,

$$\frac{q}{q'} = \frac{\overline{CQ}^2}{\overline{CD}^2} = l^2 + q^2$$

per cui

$$q' = \frac{q}{l^2 + q^2} .$$

L'ordinata di Q' è dunque doppia di quella del centro dell'iperbole cosicchè, pensando che si poteva pur prendere QC per asse x, vedesi che: *il centro dell'iperbole può ottenersi per intersezione delle parallele a CP ed a C'Q condotte pei punti di mezzo dei segmenti di comune origine in C e termine negli inversi di Q e P relativamente alla sponda.*

Digitized by Google

Indicando con α l'angolo LCQ, si ha che

$$\frac{l}{q} = cot\ \alpha$$

e l'equazione complessiva delle parallele agli assintoti passanti per l'origine degli assi è

$$x^2 - 2\ cot\ \alpha\ .\ x\ y - y^2 = 0.$$

Da questa equazione si ricava che

$$\frac{x}{y} = \frac{cos\ \alpha \mp 1}{sen\ \alpha}$$

e, siccome identicamente

$$cos\ \alpha = cos^2 \frac{\alpha}{2} - sen^2 \frac{\alpha}{2}, \quad 1 = cos^2 \frac{\alpha}{2} + sen^2 \frac{\alpha}{2},$$

$$sen\ \alpha = 2\ sen \frac{\alpha}{2}\ .\ cos \frac{\alpha}{2},$$

deducesi che: le separate, e normali, equazioni delle parallele agli assintoti passanti per C sono

$$x\ cos \frac{\alpha}{2} + y\ sen \frac{\alpha}{2} = 0, \quad x\ sen \frac{\alpha}{2} - y\ cos \frac{\alpha}{2} = 0,$$

e così vedesi che: gli assintoti son paralleli alle bisettrici degli angoli delle rette CP, CQ.

Siccome l'iperbole è equilatera e C è un suo punto, come si è visto, si posson dunque costruire nel seguente modo i suoi elementi principali: *Si costruiscano gli inversi P' e Q' di P e Q relativamente alla sponda: si traccino la parallela a CP pel punto di mezzo di CQ' e la parallela a CQ pel punto di mezzo di CP'; O sia il punto d'intersezione delle due rette così tracciate; si traccino per O le parallele alle due rette dimezzanti gli angoli delle rette CP, CQ ed esse saranno gli assintoti; si traccino le rette che dimezzano gli angoli degli assintoti ed esse saranno gli assi dell'iperbole; costruiscasi la proiezione ortogonale C_0 di C su quello di questi assi che ha maggior distanza da C; si costruiscano i punti d'intersezione dell'altro asse colla circonferenza di centro C_0 passante per C ed essi sono i vertici dell'iperbole.*

Digitized by Google

Si potrebbero ora costruire facilmente con riga e compasso tali punti dell'iperbole da poter poi tracciare, con relativa esattezza a mano, i tratti che danno, per intersezione con la sponda, i punti risolventi il problema.

5. Si potrebbe pensare di costruire M per intersezione ortogonale della sponda con iperbole di fuochi in P e Q, ma non è possibile che i vertici di tale iperbole si possan costruire usando solo riga e compasso perchè, se si potesse, conducendo le tangenti ad essa iperbole passanti per C, ed anche questo potrebbe farsi usando solo riga e compasso, si otterrebbe d'aver costruito M con gli strumenti elementari, mentre si è visto che, in generale, non si può costruire M elementarmente.

Oriolo di Voghera.

La classificazione delle Scienze fisico-chimiche e naturali

DI

ALPINOLO NATUCCI.

Se è ormai pacifico che le classificazioni hanno un carattere soggettivo e un valore relativo, è pure ammessa da tutti la grande utilità che esse presentano per il progresso degli studî scientifici. Più che di utilità, si può anzi parlare di vera e propria necessità, poichè sarebbe impossibile sottoporre ad esame e a studio l'immensa congerie di fatti che vengono rilevati e presi in considerazione anche nell'ambito di una sola scienza, se tali fatti non venissero sistemati in un ordinamento, sia pure artificiale.

La storia delle scienze ci fa pure noto che ad ogni stadio dello sviluppo scientifico corrisponde una classificazione del materiale di studio, che si adegua al progresso raggiunto. Ora noi ci poniamo la quistione: *in base ai più recenti progressi delle scienze biologiche, e in base altresì alle nuove teorie della fisica, quale ordinamento delle scienze si presenta più razionale?*

A questa domanda rispondiamo appunto con questo breve articolo.

Digitized by Google

***

Le scienze si possono ordinare in base a criteri svariatissimi. Uno dei criterî di classificazione potrebbe essere fornito dalla loro maggiore o minore matematicizzazione, ritenendosi in generale giunta a maggior grado di perfezione quella scienza che consente una trattazione più consona ai metodi logico-deduttivi proprî della matematica. In quest'ordine di idee si potrebbero ordinare le scienze secondo il seguente schema: *matematica*, *meccanica celeste*, *meccanica razionale*, *geodesia*, *fisico-matematica*, *astronomia*, *chimica*, *mineralogia* e in particolare *cristallografia*, *scienze biologiche*, *scienze economiche e sociali*.

Aggiungeremo a titolo di schiarimento, che se la *meccanica celeste*, ossia quella parte dell'astronomia che studia i movimenti dei pianeti e dei satelliti del sistema solare è giunta ad un altissimo grado di perfezione, tanto da potersi a bon diritto riguardare come quella parte delle matematiche applicate che è più rigorosa nei suoi sviluppi e più esatta nei suoi risultati; l'*astronomia* moderna in generale ha assunto, colle sue ricerche di astrofisica, con le investigazioni sugli ammassi stellari, sulle nebulose, sulla distribuzione delle stelle, sulle stelle doppie e variabili, sulla costituzione stessa dell'universo, un tale carattere di ardita induzione, che difficilmente può ancora considerarsi nel suo complesso quale figlia primogenita della matematica.

In secondo luogo, se l'applicazione dei metodi matematici alle scienze economiche e sociali trovasi ancora nello stadio iniziale, e se tali scienze mostransi ribelli a una sistemazione logico-deduttiva per la complessità degli elementi di studio e delle cause che interferiscono fra di loro nel produrre fenomeni disparatissimi, tuttavia bisogna fare un'importante eccezione per la *statistica*, la quale trovasi in un grado molto avanzato di sistemazione deduttiva ed applica con rigore i metodi matematici. Alcuni anzi vogliono riguardare la statistica più che come una scienza, come un metodo di ricerca, metodo squisitamente matematico.

***

Ma il nostro scopo non è quello di procedere ad una sistemazione di tutte le scienze, sibbene di determinare le affinità e le differenze che intercorrono fra le *scienze fisico-chimiche* e quelle

Digitized by Google

naturali. E in questo campo più ristretto e meglio determinato, ci si presentano subito due differenze molto importanti.

La prima è una differenza di metodo: alcune discipline si basano in prevalenza sull'osservazione, pur non escludendo l'esperienza, altre si fondano quasi esclusivamente sull'esperienza, pur non rifuggendo, se si presenta il bisogno, dall'osservazione; nelle une lo studio è più oggettivo, nelle altre più soggettivo. È una distinzione molto relativa, ma pure ha il suo valore e noi però formeremo due grandi gruppi: *Scienze d'osservazione* o *Scienze naturali*, e *Scienze sperimentali* o *Scienze fisico-chimiche*.

L'altra grande distinzione si riferisce alla netta *separazione*, che ormai s'impone, fra *mondo organico e mondo inorganico*.

Cinquanta anni fa, dopo il trionfo della teoria darwiniana, dopo le prime fortunate sintesi di sostanze organiche, dopo che la fisiologia ebbe spiegato in base alle leggi fisico-chimiche molti fenomeni vitali, si credette di poter ricondurre tutto il mondo organico al puro dominio di queste leggi, e si sperò di arrivare a costruire in laboratorio cellule viventi. Ma lo studio sereno e spassionato dei fatti, ha dimostrato quanto fossero errate tali credenze e fallaci tali speranze.

La *spiegazione* puramente *causale* che ci appaga per i fenomeni del mondo inorganico, non ci soddisfa affatto nel mondo degli organismi; e la *spiegazione finalista* che sorge con noi dall'introspezione che esercitiamo sui nostri proprî atti, viene facilmente estesa per analogia a tutti gli organismi animali e vegetali. Anche se i singoli atti vitali si manifestano obbedienti alle leggi della materia, e non potrebbe essere altrimenti dal momento che si opera su sostanze materiali, la loro concatenazione, il loro coordinamento manifesta sempre e ovunque la tendenza finalistica. E questo finalismo appare chiaro e lampante in tutti i fatti della vita, dai fenomeni fisiologici più elementari, quali l'assimlazione e il metabolismo, a quelli via via più complessi, quali la generazione e la rigenerazione di organi, l'adattamento prestabilito e nuovo, le azioni riflesse e gli istinti, finchè si giunge alle più elevate manifestazioni della vita umana.

Quest'argomento è stato così bene trattato, e con tanta copia di argomenti, di esempî e di citazioni da *Eugenio Rignano* in una serie di articoli comparsi su " Scientia „ dall'ottobre 1925 al febbraio 1926, che crediamo inutile insistervi. È vero che si è tentato di dare una spiegazione causale ai fatti della vita, con l'inge-

Digitized by Google

gnosa ipotesi darwiniana della *selezione naturale*, ma questa ipotesi " non basta a spiegare gli adattamenti morfologici complessi e coordinati, i quali implicherebbero l'incontro fortuito di un grandissimo numero di modificazioni particolari, presentandosi tutti come riuniti insieme in virtù di una semplice combinazione, a un momento dato, in un solo e medesimo individuo „. (*Rignano*).

Se non si può negare che la lotta per la vita, e la selezione naturale che ne è conseguenza, abbiano una certa azione eliminatoria, e forse più per gli individui nell'ambito di una data specie, che per le varie specie; l'ammettere che il numero delle specie viventi sia estremamente piccolo in confronto alle specie possibili o anche alle specie effettivamente nate, ma che non hanno potuto sopravvivere e riprodursi, contradice a quel *principio della minima azione* che vediamo sempre trionfare in natura.

E sarebbe strano che tale principio facesse difetto proprio nei fenomeni vitali che sono i più complessi ed i più laboriosi.

Pertanto, sia che si voglia ricorrere all'esistenza di un'*anima*, come vogliono le religioni rivelate, sia che si introducano delle entità metafisiche equivalenti o " *entelechie* „, sia che, rimanendo sul campo razionale, si cerchi la spiegazione desiderata in una *speciale energia nervosa* che stia a base della vita, come fa il Rignano con la sua ipotesi di una centro-epigenesi, è necessario distinguere i fenomeni vitali da quelli del mondo inorganico.

E questa distinzione si impone anche nell'ambito delle idee darwiniane, poichè " il fatto stesso che soltanto a proposito della vita si è provato il bisogno di ricorrere a un processo totalmente ignorato nel mondo inorganico, quale la selezione naturale, prova che la vita — nota argutamente il Rignano — va posta in una categoria a parte, totalmente distinta da quella che comprende i fenomeni fisico-chimici „.

***

Se ora scendiamo a considerare in modo particolare il campo delle scienze fisico-chimiche, troviamo che la rivoluzione di idee portata dalla radioattività, dalla moderna fisica dell'atomo e dalle teorie relativistiche, ci induce a modificare alquanto le distinzioni tradizionali fra i varî rami di tali scienze. Vi sono invero delle parti della fisica, nelle quali l'entità minima sostanziale che entra in gioco è la *molecola*: si pensi ad esempio alla teoria cinetica dei

Digitized by Google

gas; altre, nelle quali l'entità minima che devesi considerare è l'*atomo*, e questo avviene principalmente nello studio delle reazioni chimiche; altre infine, nelle quali non basta nemmeno l'atomo a dare una spiegazione sufficiente dei fenomeni osservati, ma bisogna ricorrere all'*elettrone* (radioattività, energia elettro-magnetica e luminosa).

Dopo aver eliminato l'etere in base alle teorie della relatività, l'ipotesi ondulatoria per la luce e per la trasmissione dell'elettricità è rimasta un po' scossa. Nello stesso tempo, come lo studio delle scariche nei gas rarefatti e dei fenomeni radioattivi aveva condotto al concetto di elettrone e di protone, cioè al concetto di quantità di elettricità negativa e positiva, indivisibili (*quantum* di elettricità); così le ricerche intorno ai fenomeni elettroluminosi, ai raggi X, e alla pressione luminosa hanno portato ad ammettere anche l'esistenza di *quantum* d'energia luminosa (*Planck*). Ma se i fenomeni relativi alla produzione, trasformazione e assorbimento della luce si spiegano bene con la teoria dei quanta luminosi, l'interferenza, la polarizzazione e la diffrazione ammettono invece una spiegazione più semplice con l'ipotesi ondulatoria della luce. Pertanto non mancano tentativi (*Bohr* e altri) per conciliare le due teorie; ma noi non entreremo in particolari, rimandando su questo argomento all'interessante articolo di *A. Sommerfeld* (Ueber die lezten Fortschritte der Atomphysik) in " Scientia „ Anno 20, n. 1.

Comunque si vogliano giudicare queste nuove ipotesi, una cosa è ormai certa, cioè che i fenomeni elettromagnetici e luminosi sono strettamente collegati agli elettroni. Quanto ai fenomeni termici, ove si pensi alle radiazioni calorifiche oscure, si vede che si possono far rientrare pure essi nel vasto campo dell'energia raggiante, anche se l'effetto più notevole di tali radiazioni è quello di accrescere l'energia cinetica molecolare dei corpi che esse investono.

La fisico-chimica e la radioattività costituiscono invece due parti delle scienze sperimentali che sono in certo modo intermedie fra le principali sezioni sopra enumerate; la prima ha a che fare con fenomeni di natura atomico-molecolare; la seconda con fenomeni atomico-elettronici.

Per cui, riassumendo, riteniamo conforme alla natura stessa delle cose, che le scienze fisico-chimiche vengano divise in tre grandi gruppi, uniti fra loro da due discipline di collegamento: 1° *la fisica della molecola*, comprendente la meccanica dei solidi,

Digitized by Google

la meccanica dei liquidi e dei gas, l'acustica; 2° *la fisico chimica*, che costituisce l'allàcciamento fra la fisica della molecola e la fisica dell'atomo; 3° *la fisica dell'atomo*, comprendente i fenomeni chimici propriamente detti; 4° *la radioattività* che costituisce l'allacciàmento fra la fisica dell'atomo e la fisica dell'elettrone; 5° *la fisica dell'elettrone*, infine, che comprenderebbe la termologia, l'ottica e l'elettromagnetismo.

NOTE DIDATTICHE.

Sul problema della sezione aurea.

1. Il prof. V. G. Cavallaro, nel fascicolo 1-2 dell'aprile 1925 del Bollettino di matematica del Conti, pubblicava il seguente teorema, proponendone la dimostrazione ai lettori di quel pregiato periodico: "Dagli estremi B e "C di un diametro di un cerchio si "conducano le tangenti BA, CD in "opposte direzioni. Supposto che sia "BC = n AB, CD = n^2 AB con n reale "e positivo >, = oppure < 1, diciamo M ed N i punti in cui la con-"giungente AD incontra il cerchio; "allora le rette CM, CN passano per "due punti fissi di AB che dividono "AB internamente ed esternamente "in sezione aurea".

È evidente che, dimostrata questa proposizione, identico procedimento si potrà applicare per dimostrare che anche le rette BN, BM dividono il segmento di tangente CD internamente ed esternamente in sezione aurea. Basta osservare che se a è la misura del segmento AB e b la misura del segmento CD, posto $m = \frac{1}{n}$ dalle ipotesi su esposte consegue:

$$\overline{AB} = a \quad \overline{BC} = n\,a \quad \overline{CD} = n^2 a \quad (1)$$
$$\overline{CD} = b \quad \overline{BC} = m\,b \quad \overline{AB} = m^2 b$$

Lo stesso A. infatti in un interessante studio pubblicato sullo stesso Bollettino (Fasc. 2-3 del 1926) intitolato: "Nuove ricerche sulla genesi della sezione aurea", nel quale vengono messi completamente in luce i legami esistenti fra i vari metodi noti per la costruzione della s. a., dà al teorema in oggetto la seguente forma più completa: "Sia il diametro "BC di un cerchio medio geometrico "fra i segmenti BA, CD delle tan-"genti al cerchio condotte dai punti "B e C in opposte direzioni. Diciamo "M, N i punti in cui la congiungente "AD incontra il cerchio: Le proiet-"tanti CM, CN dividono coi punti P, "Q int. ed est. in s. a. il segmento "di tangente AB, mentre le proiet-"tanti BN, BM dividono siffattamente "il segmento di tangente CD" e lo dimostra rapidamente per via sintetica. È ivi, in una nota, accennato ad una mia dimostrazione trigonometrica della stessa proposizione, che sebbene complessa, può, e per la piana via seguita perchè sgombra di artifici, e per gli sviluppi cui dà luogo, presentare un qualche interesse, se si noti che essa può essere direttamente sviluppata dai giovani delle nostre

Digitized by Google

scuole medie superiori, opportunamente guidati.

Mi propongo pertanto di esporla succintamente in questa noticina.

2. Sia E (1) il punto di intersezione della AD con il diametro CB; si congiungano i due punti M ed N con il centro O della circonferenza descritta e si tengano presenti le relazioni (1) in cui supporremo per ora $n > 1$; donde $DC > BC > AB$.

Dalla considerazione dei due triangoli simili ABE, DCE si può trarre

$$BE : CE = AB : DC$$

donde, componendo e sostituendo ai segmenti le rispettive misure:

$$n\,a : \overline{BE} = (a + n^2 a) : a$$

da cui $\overline{BE} = \dfrac{n\,a}{1+n^2}$

e quindi:

$$\overline{EO} = \overline{BO} - \overline{BE} = \frac{n\,a}{2} - \frac{n\,a}{1+n^2} = \frac{n(n^2-1)\,a}{2(1+n^2)}$$

Dal triangolo rettangolo ABE, indicato con α l'ampiezza dell'angolo AEB, si trae:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{AB}}{\overline{AE}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + \frac{n^2 a^2}{(1+n^2)^2}}} = \frac{1+n^2}{\sqrt{(1+n^2)^2+n^2}}$$

e quindi (2)

$$\cos\alpha = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2\alpha} = \frac{n}{\sqrt{(1+n^2)^2+n^2}}$$

Applicando al triangolo OME il teorema dei seni, posto $E\hat{M}O = \beta$, si ha:

$$\frac{\overline{OE}}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{\overline{OM}}{\operatorname{sen}(\pi-\alpha)} \qquad \text{da cui:}$$

$$\operatorname{sen}\beta = \frac{O\,E \operatorname{sen}\alpha}{O\,M} = \frac{n^2-1}{\sqrt{(1+n^2)^2+n^2}}$$

e quindi (3)

$$\cos\beta = \frac{n\sqrt{5}}{\sqrt{(1+n^2)^2+n^2}}$$

Posto $P\hat{C}B = \gamma$ e quindi $M\hat{O}E = 2\gamma$, per il teorema dell'angolo esterno si ha

$$2\gamma = \alpha - \beta$$

E quindi

$$\cos 2\gamma = \cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta$$

Da cui per le (2) e le (3), si ha:

$$\cos 2\gamma = \frac{n^2\sqrt{5}}{(1+n^2)^2+n^2} + \frac{n^4-1}{(1+n^2)^2+n^2} = \frac{n^4+n^2\sqrt{5}-1}{n^4+3n^2+1}$$

Ne consegue

$$\operatorname{tg}\gamma = \sqrt{\frac{1-\cos 2\gamma}{1+\cos 2\gamma}} = \sqrt{\frac{n^2(3-\sqrt{5})+2}{2n^4+n^2(3+\sqrt{5})}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{\left(n^2+\frac{2}{3-\sqrt{5}}\right)(3-\sqrt{5})}{\left(n^2+\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)\cdot 2}}$$

Ed essendo $\dfrac{2}{3-\sqrt{5}} = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

si avrà:

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{2}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2n}$$

E poichè, considerato il triangolo rettangolo CBP, si ha

$$\overline{BP} = \overline{CB}\operatorname{tg}\gamma$$

risulterà

$$\overline{BP} = n\,a\cdot\frac{\sqrt{5}-1}{2n} = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2} \qquad (4)$$

(1) Il lettore è pregato di tener presente la prima forma dell'enunciato del teorema e di costruirsi la figura.

Digitized by Google

Analogamente, posto $B\hat{C}Q = \delta$ e quindi $EON = 2\delta$, risulta:

$$2\delta = \pi - (\alpha + \beta)$$

e quindi

$$\cos 2\delta = -\cos(\alpha+\beta) = -\operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\beta - \cos\alpha\cos\beta$$

Donde, per le (2) e le (3),

$$\cos 2\delta = \frac{n^4 - n^2\sqrt{5} - 1}{n^4 + 3n^2 + 1}$$

da cui:

$$\operatorname{tg}\delta = \sqrt{\frac{1-\cos 2\delta}{1+\cos 2\delta}} = \sqrt{\frac{n^2(3+\sqrt{5})+2}{2n^4+n^2(3-\sqrt{5})}} = \frac{1}{n}\sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{2}} = \frac{1+\sqrt{5}}{2n}$$

E poichè, considerato il triangolo rettangolo CBQ, si ha:

$$\overline{BQ} = \overline{BC}\operatorname{tg}\delta$$

risulterà

$$\overline{BQ} = n\,a\,\frac{1+\sqrt{5}}{2n} = a\,\frac{1+\sqrt{5}}{2} \qquad (5)$$

Con le (4) e (5) il T. risulta dimostrato nel caso considerato: $n > 1$.

Per $n = 1$ si osservi che AD passa per il centro O; il T. ci riconduce alla nota costruzione euclidea della s. a. risultando $PB = AM$. Infatti si ha:

$$\operatorname{tg} A\hat{O}B = \frac{\overline{AB}}{\overline{AO}} \quad \text{e quindi} \quad \cos A\hat{O}B = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

Donde, per essere $P\hat{C}B = \frac{1}{2}A\hat{O}B$, consegue

$$\operatorname{tg} PCB = \sqrt{\frac{1-\cos A\hat{O}B}{1+\cos A\hat{O}B}} = \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

E quindi

$$\overline{BP} = \overline{CB}\operatorname{tg} P\hat{C}B = a\,\frac{\sqrt{5}-1}{2}$$

In modo analogo si giunge alla (5).

Infine per $n < 1$ si può ripetere un procedimento identico a quello seguito nel primo caso; ma quanto abbiamo esposto riteniamo sia più che sufficiente per provare che la proposizione, oggetto di questa nota, può esser presentata sotto forma di problema da risolvere trigonometricamente; l'alunno che perverrà da sè alla determinazione dei segmenti $\overline{BQ}$ e $\overline{BP}$ in funzione di AB, avrà la sensazione di aver *scoperto* il teorema. Si verrà così a realizzare quel *metodo attivo* la cui applicazione per lo studio della matematica nelle scuole medie, non sarà mai abbastanza raccomandata.

Foggia, dicembre 1926.
R. Istituto Magistrale.

PIETRO PANICHI.

Digitized by Google

La legge di Boyle-Mariotte e la legge di Avagadro.

Nell'insegnamento della Fisica nei nostri licei è didatticamente utile che qualche volta ci si allontani dal metodo puramente *sperimentale* di ricerca per mostrare qualche esempio di metodo speculativo di carattere puramente *matematico* specie per quei fenomeni che finiscono per sintetizzarsi in una formola algebrica. In tal modo l'Allievo potrà maggiormente apprezzare le finalità dello studio delle matematiche anche fuori del campo dell'astrazione pura. Così ad esempio, mostrata sperimentalmente la legge di Boyle-Mariotte se ne può dare una facile dimostrazione analitica basata sulla *teoria cinetica dei gas* i cui principi fondamentali sono a conoscenza dell'Allievo non foss'altro limitatamente ai seguenti postulati:

1) — i gas sono costituiti di particelle separate, elastiche, piccolissime (molecole).

2) — la distanza media fra dette particelle è grandissima in rapporto alle piccolissime dimensioni di queste.

3) — dette particelle sono in continuo moto traslatorio rettilineo in tutte le direzioni e non vengono deviate che dagli urti che possono dare negli ostacoli che incontrano.

4) — la velocità di dette particelle può ritenersi costante ed eguale per tutte.

Premesso ciò, consideriamo una massa M di gas racchiusa in un recipiente cubico di spigolo s e sia u la velocità in cm per secondo di ciascuna molecola m, velocità che possiamo ritenere normale alla parete. Affinchè una molecola, urtata una parete del cubo, torni ad urtar la, dovrà trascorrere un tempo $T = \frac{2s}{u}$ e quindi il *numero di urti* che ogni molecola darà sulla stessa parete in un secondo sarà: $u = \frac{1}{T} = \frac{u}{2s}$. Ritenendo normali alle pareti i moti delle varie molecole, possiamo ritenere tutte le varie velocità di queste ridotte alle tre direzioni ortogonali parallele agli spigoli del cubo, sicchè il numero di molecole che si muovono nella direzione normale ad una faccia saranno $\frac{N}{3}$ quando si indichi con N il numero totale di molecole della massa gasosa M. L'effetto di un urto di molecole sarà $f = 2mu$ trattandosi di molecola che partita da una parete vi torna dopo aver urtato la parete opposta: sicchè la pressione esercitata da tutte le molecole su una parete sarà:

$$P = \frac{N}{3} \cdot \frac{u}{2s} \cdot 2mu = \frac{Nmu^2}{3s}$$

e la pressione sull'unità di superficie sarà:

$$p = \frac{P}{s^2} = \frac{Nmu^2}{3s^3}$$

ma s^3 è il volume v della massa gasosa M; quindi potremo scrivere:

$$p = \frac{Nmu^2}{3v}$$

da cui

$$pv = \frac{Nmu^2}{3} \qquad (1)$$

Siccome l'espressione $\frac{Nmu^2}{3}$ è una quantità costante per quella mas-

Digitized by Google

sa gasosa, la relazione precedente, altro non è che l'espressione della *legge di Boyle-Mariotte* secondo la quale appunto: *per una stessa massa gasosa è costante il prodotto del suo volume per la pressione che sopporta quando si mantenga costante la temperatura*. Il termine $\frac{N m u^2}{3}$ dà il valore di detta costante.

Ora, se operiamo su due masse M_1, M_2 di gas differenti le cui particelle m_1, m_2 siano dotate di velocità u_1, u_2, supposto che ad una data temperatura, sottoposte alla medesima pressione p, occupino il medesimo volume v, qualora N_1 ed N_2 siano i numeri delle loro molecole, s'avrà per la (1):

$$pv = \frac{N_1 m_1 u_1^2}{3} \quad \text{e} \quad p v = \frac{N_2 m_2 u_2^2}{3}$$

da cui confrontando:

$$N_1 m_1 u_1^2 = N_2 m_2 u_2^2$$

Ma $m_1 u_1^2 = m_2 u_2^2$ perchè le molecole dei due gas sono dotate di uguale energia cinetica per il fatto che le due masse gasose sono alla medesima temperatura e alla medesima pressione, sicchè rimane:

$$N_1 = N_2 \qquad (2)$$

la quale relazione esprime la *legge di Avogadro* secondo cui *volumi eguali di gas alle medesime condizioni di temperatura e pressione contengono egual numero di molecole.*

La (1) permette anche di dedurre una formola notevole per il calcolo della *velocità molecolare* di un gas.

Infatti da essa si ricava:

$$u^2 = \frac{3 p v}{N m}$$

Ma N m è la massa totale M del volume v di gas, e quindi sarà anche:

$$u^2 = \frac{3 p v}{M}$$

e qui $\frac{v}{M}$ è la densità δ del gas stesso sicchè avremo in definitiva:

$$u^2 = 3 p \delta$$

e infine:

$$u = \sqrt{3 p \delta} \qquad (3)$$

formola che dà la *velocità molecolare del gas.* A titolo di curiosità diremo che si è trovato:

per	l'idrogeno	v = cm.	169·800	al secondo
»	l'ossigeno	»	42·500	»
»	l'azoto	»	45·300	»
»	il vapore acqueo	»	56·600	»

Milano, 19 marzo 1927.

ARNALDO CAPPELLONI
del Ginnasio-Liceo Calchi-Taeggi.

Digitized by Google

Moto circolare uniforme e moto oscillatorio.

1. — *Velocità nel moto circolare uniforme.* — Consideriamo un punto che si muove in verso antiorario sopra un cerchio di centro O e raggio R, di moto uniforme e con velocità angolare ω.

Indicando con T il tempo (*periodo*) che il punto impiega per compiere un giro avremo $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

La velocità effettiva sarà in ogni istante perpendicolare al raggio, e il suo modulo sarà

$$V = R\omega = \frac{2\pi R}{T}.$$

2. — *Accelerazione.* — Il modulo dell'accelerazione è il limite cui tende la velocità media $\frac{|\Delta V|}{\Delta t}$ relativa a un intervallo infinitesimo che comprenda l'istante considerato. Se α è l'ampiezza dell'arco descritto nel tempo Δt, avremo $\Delta t = \frac{R\alpha}{V}$,

$|\Delta v| = 2V \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha$, onde

$$\frac{|\Delta v|}{\Delta t} = 2V \cdot \operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha \cdot \frac{V}{R\alpha} = \frac{V^2}{R} \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2}\alpha}{\frac{1}{2}\alpha},$$

il cui limite, per α tendente a zero, è $\frac{V^2}{R} = \text{cost.}$

Quanto al senso, essendo il moto uniforme, l'accelerazione sarà costantemente diretta verso il centro.

3. — *Componenti della velocità secondo gli assi.* — Riferiamo le posizioni del punto mobile a due assi cartesiani ortogonali passanti per 0, e prendiamo come parte positiva dell'asse delle x quella che passa per la posizione iniziale A del punto mobile. Detti x, y i moduli delle coordinate, e v_x, v_y quelli delle componenti della velocità secondo gli assi, per la simiglianza del triangolo di cateti x, y con quella di cateti v_y, v_x, avremo:

$v_x : V = y : R$, onde

$$v_x = \frac{V}{R} y = \omega y = \omega \sqrt{R^2 - x^2};$$

$v_y : V = x : R$, onde

$$v_y = \frac{V}{R} x = \omega x.$$

4. *Componenti dell'accelerazione.* — Dicendo a_x, a_y i moduli delle componenti dell'accelerazione secondo gli assi, per la simiglianza del triangolo di cateti x, y con quelli di cateti a_x, a_y, avremo:

$a_x : \frac{V^2}{R} = x : R$, onde

$$a_x = -\frac{R^2}{R^2} \cdot x = -\omega^2 x;$$

$a_y : \frac{V^2}{R} = y : R$, onde

$$a_y = -\frac{V^2}{R^2} \cdot y = -\omega^2 y.$$

5. — *Moto armonico.* — Tale è il moto della proiezione ortogonale del punto mobile sopra uno degli assi.

Digitized by Google

Il moto circolare uniforme può adunque considerarsi come risultante di due moti armonici le cui direzioni sono perpendicolari tra di loro.

Esaminando in particolare il moto armonico che ha luogo lungo l'asse delle x, il modulo della sua velocità sarà $v_x = \omega\sqrt{R^2 - x^2}$, e quello dell'accelerazione sarà $a_x = \omega^2 x$.

Mentre il punto mobile sul cerchio compie un giro, la sua proiezione descrive due volte il diametro, compiendo un'*oscillazione completa*.

Si ha così un *moto oscillatorio* di *ampiezza* R, di *centro* O e di *periodo* T. Il punto mobile parte da A con velocità nulla e con accelerazione massima $\omega^2 R = \frac{V^2}{R}$; nel primo quarto di periodo l'accelerazione va diminuendo fino ad annullarsi in O, mentre la velocità va aumentando fino ad assumere in O il suo valore massimo $\omega R = V$. Nel successivo quarto di periodo il punto si porta da O fino all'altra estremità B del diametro, e intanto l'accelerazione, che ha cambiato di senso, mantenendosi cioè diretta verso il centro, riprende in senso inverso gli stessi valori di prima fino a riassumere il suo valore massimo in B, dove invece la velocità finisce con l'annullarsi. Nella seconda mezza oscillazione il punto percorre il diametro in senso inverso e con le stesse leggi di prima.

6. — *Forza che determina il moto armonico.* — Il moto armonico suddetto può considerarsi come dovuto a una forza $F = m a_x = m \omega^2 x$, agente sopra un punto di massa m, mobile sull'asse delle x, e costantemente diretta verso il centro O. Essa è direttamente proporzionale allo *spostamento* x. In un tempo $t \leq \frac{T}{4}$ questa forza fa percorrere al punto uno spazio $s = R - x$, e perciò compie un *lavoro*.

Essendo $x = R - s$, avremo $F = m\omega^2(R - s) = m\omega^2 R - m\omega^2 s$; la forza è dunque una funzione lineare dello spazio *s*, e la *forza media* sarà $F_m = m\omega^2 R - \frac{1}{2} m\omega^2 s$, onde il lavoro eseguito dalla forza nel tempo $\frac{T}{4}$ lungo lo spazio $AO = R$, sarà

$$L = F_m \cdot R = (m\omega^2 R - \frac{1}{2} m\omega^2 R) \cdot R = \frac{1}{2} m\omega^2 R^2 = \frac{1}{2} m V^2,$$

che è la forza viva acquistata dal punto materiale nell'intervallo considerato. (V. mia nota su questa *Rassegna*, gennaio 1926).

7. — *Principio delle forze vive.* — Proponiamoci ora di calcolare il lavoro eseguito dalla forza F lungo lo spazio $R - r$ che va dal punto A di ascissa R al punto C di ascissa $r > o$, essendo $r < R$.

Esso sarà uguale al lavoro L eseguito lungo lo spazio $AO = R$, meno il lavoro *l* eseguito lungo lo spazio $CO = r$.

Per determinare *l* osserviamo che se un punto si muove sopra un cerchio di centro O e raggio r nello stesso senso e con la stessa velocità angolare ω di quello che si muove sul cerchio di raggio R, esso da luogo sul diametro $2r$ a un altro moto armonico il quale può considerarsi come dovuto a una forza $F = m\omega^2 x$, dove $x \leq r$.

Questa forza adunque, per ogni valore di $x \leq r$, è identica a quella che determina il moto armonico lungo il diametro 2R, e il lavoro da da essa compiuto lungo lo spazio $CO = r$ sarà

Digitized by Google

$I = \frac{1}{2} m \omega^2 r^2$. Avremo così:

$$L = I = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2 - \frac{1}{2} m \omega^2 r^2 =$$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 (R^2 - r^2).$$

Concludiamo che il lavoro eseguito dalla forza F lungo lo spazio $AC = R - x$ è $\frac{1}{2} m \omega^2 (R^2 - x^2) =$

$$= \frac{1}{2} m \omega^2 v_x^2;$$

E siccome la velocità del moto armonico, nell'intervallo considerato varia da zero a v_x così ne segue che il lavoro eseguito dalla forza F è equivalente in ogni istante alla energia cinetica acquistata dal punto materiale.

8. — *Moto pendolare.* — Consideriamo un pendolo semplice di lunghezza l e massa m; e supponiamo che l'ampiezza α delle due oscillazioni sia così piccola da poter sostituire α a *sen* α in tutti i calcoli che seguono.

Sia $\beta \leq \alpha$ l'angolo variabile che, nel primo quarto di periodo, la posizione del filo fa con la posizione verticale di equilibrio. La componente tangenziale del peso $m g$ è data da $m g \beta = m \frac{g}{l} . l \beta$, ed è quiudi proporzionale allo spostamento $l \beta$.

Il moto della pallina prescindendo dalla forma della traiettoria, è identico a un moto armonico di ampiezza α, e di velocità angolare $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

Infatti in quest'ultimo moto la velocità iniziale è nulla, l'accelerazione iniziale è $\frac{g}{l} . l \alpha = g \alpha$, e la forza motrice è $m g \beta$ dove β varia da α a o. Il periodo T sarà dato da

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}.$$

ARDICCIO MARENGONI

R. Liceo Scientifico
di Bergamo.

Bergamo 31 dicembre 1926.

Direzione ed Amministrazione: Istituto G. Ferraris — Roma.
Direttore responsabile: Prof. Enrico Gradara.

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore - *Città di Castello* - 1927.

Digitized by Google

ARCHIMEDE

IL METODO

Quest'opera di *Archimede*, l'ultima scoperta, tradotta per la prima volta in italiano è corredata di numerose note esplicative, critiche, storiche e di citazioni, da una prefazione e da una tavola delle figure.

Indice della prefazione. 1° Ragione della traduzione. 2° Le opere di Archimede. 3° La scoperta del *Metodo*. 4° Il contenuto del *Metodo*. 5° Le traduzioni del *Metodo*.

Indice del Metodo: Introduzione. Lemmi. 1° Area del segmento di parabola. 2° Volume della sfera. 3° Volume dell'ellissoide. 4° Volume del segmento di paraboloide. 5° Centro di gravità del segmento di paraboloide. 6° Centro di gravità dell'emisfero. 7° Volume del segmento di sfera. 8° Volume del segmento di ellissoide. 9° Centro di gravità del segmento di sfera. 10° Centro di gravità del segmento di ellissoide. 11° Volume e centro di gravità del segmento di iperboloide. 12° Volume di un particolare segmento di cilindro P. I 13° *Id. id.* P. II. 14° *Id. id.* Dimostrazione con la parabola ausiliaria 15° *Id. id.* Dimostrazione geometrica.

Inviare cartolina vaglia di **L. 6** al **Prof. ENRICO GRADARA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris***, Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore

(Perugia) CITTA' DI CASTELLO (Perugia)

Esecuzione accurata ed elegante di qualsiasi genere di lavoro tipografico di lusso e commerciale: Libri - Opuscoli - Riviste - Giornali - Cartoline illustrate ed illustrazioni - Carte intestate - Buste - Biglietti - Modelli - Registri - Libretti Colonici - Partecipazioni di lutto e di nozze, ecc.

Avendo l'azienda carattere di Scuola per orfani e non scopo di lucro, è in grado di praticare prezzi modicissimi.

Digitized by Google

COLLABORATORI

E. ALLARA — A. ANTONELLI — G. APRILE — E. ARTOM — P. BARDELLI — P. BENEDETTI — G. BEMPORAD — A. BERNINI — A. BARTORELLI — F. BERIO — U. BINI — U. CASSINA — P. CATTANEO — G. V. CAVALLARO — E. CAVALLI — F. CHIAPPETTI — C. CIAMBERLINI — A. CIANFLONE — U. CRUDELI — A. COLA — S. COMPOSTO — L. CONTE — M. DEL GIUDICE — L. DELLA CASA — G. DELITALA — G. DE STEFANO — L. DI LAZZARO — S. ENA — G. FAVARO — M. FRAILIK — O. FRANCESCHI — M. FRITZSCHE — A. FONTANA — R. GALLONI — A. GANDINI — A. GASPARINI — F. GIUDICE — V. GRADARA ENA — U. GRASSI — G. LACCA — P. LANZAVECCHIA — R. LEONARDI — M. LEONCINI — V. MARSEGUERRA — E. MACCAFERRI — A. MARENGONI — M. MIGLIO — G. MIRTO — M. MIRTO — U. MONETTI — A. NATUCCI — A. NEPPI — A. PADOA — P. PANICHI — G. PEANO — N. PELLEGRINI — P. PENNA — R. PISCEL — G. QUAGLIA — N. RICCI CARTOM — F. RIMONDINI — G. SABINI — U. SALINI — A. SALMOIRAGHI — A. SCALA — P. SCATIZZI — A. SCHOR — SCHOR C. — F. SIBIRANI — N. SIRACUSANO — G. SPINA — D. SPANO — L. TENCA — S. TOSCANO — G. VICI — E. VIGLEZIO — L. VINGIANI — G. VITALI.

AVVERTENZA AI COLLABORATORI

La Rassegna *dedicherà l'ultimo dei fascicoli della presente annata alla commemorazione di* **Alessandro Volta**; *tutti i collaboratori che desiderano partecipare ad essa con scritti sulla vita e sull'opera dell'inventore della pila sono pregati di inviare gli articoli prima del 30 settembre.*

Rassegna di Matematica e Fisica

Annate: I (1920-21) — II (1921-22): — III (1922-23): — IV (1923-24) — V (1924-1925): — VI (1926).

Ciascun volume con frontespizio e indici . . . . . L. **30**

Un fascicolo separato . . . . . L. **4**

Agli abbonati, librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento.

Inviare cartolina vaglia al **Prof. MARCELLO PUMA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris,*** Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Digitized by Google

324 ~ 11.676

Anno VII - N. 9-10 Settembre-Ottobre 1927

RASSEGNA

DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA

SOMMARIO

ODOARDO FRANCESCHI: Sopra una certa trasformazione birazionale dello spazio a 4 dimensioni.

DOMENICO GALLO: Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione.

Note didattiche — Un'altra costruzione sulla media armonica di due segmenti (GIULIO VICI). — Trasformazione di un rettangolo (FEDERIDO CHIAPPETTI). — Questione da risolvere (GIULIO VICI). — Osservazioni sulle comuni concezioni dell'inerzia (ERNESTA GOLDSTRUF). — Una dimostrazione del teorema di Pitagora (GUIDO SINOPOLI).

ABBONAMENTO ANNUO:

ITALIA. . . L. 20 — ESTERO. . . L. 25

Inviare l'importo all'Amministrazione

Piazza di Spagna, 35 ROMA (6)

BIBLIOTECA NAZIONALE V.E. ROMA
24 NOV 1927
* RIVISTE *

ROMA

Direzione e Amministrazione:

Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

ANNO VII

(1297)

DELLA

Rassegna di Matematica e Fisica

Abbonamento all'anno VII: Italia L. 20 - Estero L. 25
Un numero separato dell'anno VII: Italia L. 3 - Estero L. 3,50

ai librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento

inviare cartolina vaglia al

Prof. MARCELLO PUMA
Istituto G. Ferraris - Piazza di Spagna, 35 - Roma (6)

---

*A coloro che ci invieranno in una sola volta l'importo di 5 nuovi abbonamenti si concederà l'***abbonamento gratuito.**

La corrispondenza con la Rassegna deve essere inviata all'indirizzo:

Direzione della Rassegna - Istituto G. Ferraris
Piazza di Spagna 35 - Roma (6)

N.B. *Per avere pronta risposta occorre inviarne l'affrancatura in francobolli.*

VITA NUOVA

ABBONAMENTO ANNUO L. 2

Dirigere vaglia

ISTITUTO "G. FERRARIS"
Piazza di Spagna 35 - ROMA (6)

Digitized by Google

Alcune proprietà delle corde degli angoli convessi e qualche applicazione (*)

DI

DOMENICO GALLO.

50. — Il precedente teorema si riduce in particolare al seguente:

Teorema. — Se da un punto di un lato di un triangolo si innalza la normale e si conducono le antip. agli altri due lati, un estremo del primo ed il punto d'intersezione della normale colla retta dell'altro lato ivi concorrente, sono coniugati armonici dei punti d'intersezione della stessa retta con le due antiparallele.

51. — *Teorema. — Il rettangolo delle due antip. condotte da un punto di un lato di un triangolo agli altri due è equivalente al rettangolo dei segmenti, in cui il punto divide il lato.*

Nel triangolo BQR (fig. 4) sia DE antip. di BQ e DH antip. di BR; si avrà (43): $DE \times DH = DQ \times DR$.

52. — Più in particolare ancora dal teorema 43, con nomenclatura ordinaria, scende il seguente:

Teorema. — Se da un punto dell'ipotenusa s'innalza una normale, il rettangolo dei segmenti su essa intercettati dalle rette dei cateti è equivalente al rettangolo dei segmenti in cui il punto divide l'ipotenusa.

Nel triangolo rettangolo HOG sia BD normale all'ipotenusa HG (fig. 5); sarà BE antip. del cateto HO e BD antip. di OG, quindi (43): $BD \times BE = BG \times BH$.

53. — E infine nel caso particolarissimo che la normale alla ipotenusa passi pel vertice dell'angolo retto, le due antiparallele ai cateti coincidono con l'altezza sull'ipotenusa, e il teorema 43 si riduce al:

Teorema (di Euclide, 2ª tesi). — *L'altezza relativa all'ipo-*

(*) Continazione dell'art. dal medesimo titolo in *Rassegna* A. VI, pag. 1 A. VII, pag. 39, e pag. 57.

Digitized by Google

tenusa è m. p. fra le proiezioni dei cateti sull'ipotenusa stessa.

54. — Allorchè si indaga sopra una figura per la dimostrazione di un teorema, o per la risoluzione di un problema, se relazioni metriche possono all'uopo giovare, parecchi teoremi sulle corde antiparallele possono offrirne.

Daremo un esempio: *una corda normale di una striscia e due corde oblique normali fra loro;* da una figura così semplice si possono ricavare molte relazioni metriche.

Sia AB una corda normale (fig. 5) della striscia (a, b) e siano CD e EF due corde oblique, normali fra loro, siano H e G i punti

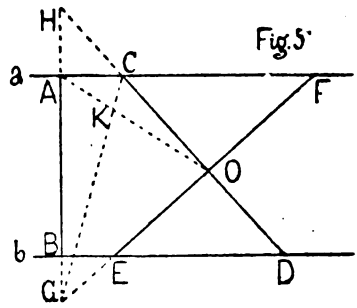


Fig. 5

d'intersezione dei loro prolungamenti: sono evidenti parecchie coppie di triangoli simili, come HAC e HBD, GBE e GAF, OED e OCF, ecc. che forniscono non poche relazioni metriche; ma alcune relazioni, che pure si ricavano da triangoli simili (ai qual però non facilmente si pensa) sono fornite, anzi messe in evidenza, da teoremi sopra le corde antiparallele; e questi teoremi suggeriscono anche la costruzione di segmenti che possono fornire molte di tali relazioni.

Nel citato esempio il teorema 52 fornisce: $BH \times BG = BD \times BE$ e $AH \times AG = AC \times AF$; il teorema 43 fornisce: $AC \times BE = AH \times BG$, perchè AC è antip. di OG e BE è antip. di OH, e fornisce anche: $BD \times AF = BH \times AG$, perchè BD è antip. di OG e AF è antip. di OH. — Per il (13, f) e il (13, g) dalla coppia di antiparallele AC e OG si ha: $HA \times HG = HO \times HC$, $AC \times OH = OG \times HA$, $AC \times HG = OG \times HC$; analogamente dalla coppia AG e OC si ha: $FA \times FC = FO \times FG$, $OC \times FG = AG \times FC$, $OC \times AF = AG \times OF$; dalla coppia BH e OE si ha: $DE \times DB = DO \times DH$, $OE \times DH = BH \times DE$, $OE \times BD = BH \times OD$;

Digitized by Google

dalla coppia BE e OH si ha: GH $\times$ GB = GO $\times$ GE, BE $\times$ GH = OH $\times$ EG, BE $\times$ OG = OH $\times$ BG; dalla coppia BG e OD si ha: EB $\times$ ED = EG $\times$ EO, BG $\times$ ED = OD $\times$ GE, BG $\times$ OE = OD $\times$ BE; dalla coppia AH e OF si ha: CH $\times$ CO = CA $\times$ CF, AH $\times$ CF = OF $\times$ CH, AH $\times$ CO = OF $\times$ AC; dalla coppia BD e OG ricaviamo: HB $\times$ HG = HO $\times$ HD, BD $\times$ HO = OG $\times$ HB, BD $\times$ HG = OG $\times$ HD; infine dalla coppia AF e OH abbiamo: GA $\times$ GH = GO $\times$ GF, OH $\times$ GA = AF $\times$ GO, OH $\times$ GF = AF $\times$ GH.

Dalle tre coppie di corde parallele: AC e BD, AF e BE, ED e CF si ricavano altre nove relazioni analoghe alle precedenti; e parecchie se ne cavano dall'applicazione del teorema di Pitagora.

Aggiungendo poi qualche linea ausiliaria, si possono ottenere parecchie altre relazioni analoghe alle precedenti; così (19) AO e CG sono corde antip. dell'$\hat{H}$ e dell'$\hat{F}$; AC e OG, che abbiamo considerate corde antip. dell'$\hat{H}$, lo sono anche dell'$A\hat{K}C$; anche AG e CO, già considerate nell'$\hat{F}$, sono corde antiparallele anche dell'$C\hat{K}O$; per la sola coppia AO e CG si possono scrivere altre cinque relazioni analoghe alle precedenti. Per le coppie BD e EH, OE e BH, BE e OH si può ripetere quanto si è detto per le tre coppie precedenti. E volendo ancora estendere, si può introdurre la corda HF antip. di AO rispetto all'$\hat{G}$ e all'$A\hat{C}O$, quindi AH e OF, già considerate rispetto all'$A\hat{C}H$, sono corde antip. rispetto all'angolo della coppia precedente: infine OH e AF, già considerate rispetto all'$A\hat{G}O$, sono corde antip. rispetto all'angolo della coppia anzidetta; e queste coppie forniscono non poche di tali relazioni. Da ultimo l'introduzione della corda GD, antip. di OB rispetto all'$\hat{H}$ e all'$B\hat{E}O$, porta alla considerazione di altre tre coppie analoghe alle precedenti.

55. — Una striscia è l'angolo limite degli angoli convessi (riporto qui una proposizione che avrei dovuto collocare subito dopo il n. 26); *due corde antip. di una striscia formano coi lati triangoli isosceli, quindi esse sono eguali e, mentre in generale il punto d'incontro di due corde antiparallele divide (internamente o esternamente) ciascuna di esse in parti i cui rettangoli sono equivalenti, il punto d'incontro di due corde antip. di una striscia divide le medesime in parti rispettivamente eguali.*

Le corde antip. delle striscie sono di nessuno o scarsissimo interesse.

56. — In alcuni casi particolari le corde antiparallele coinci-

Digitized by Google

dono con segmenti notevoli che hanno il loro nome nella nomenclatura comunemente usata; allora ai teoremi generali, servendosi di questa nomenclatura, si può dare forma più comoda per le applicazioni.

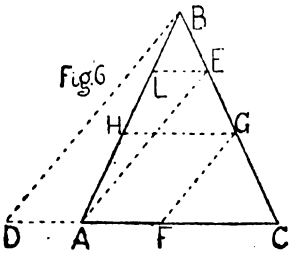
Se in un triangolo un angolo è doppio di un altro, la bisettrice dell'angolo maggiore è antiparallela del lato opposto al terzo angolo; la parallela alla bisettrice pel vertice dell'angolo minore è antiparallela allo stesso lato.

Nel triangolo isoscele l'antiparallela alla base per uno dei suoi stessi punti coincide con la base medesima, perchè questa nell'angolo ad essa opposto è simmetrica di se stessa; quindi, dicendo semplicemente *antiparallela per un vertice*, deve sempre sottintendersi *ad un lato*; perciò, nei casi quando occorrerà precisare, diremo semplicemente: *antiparallela pel vertice, antiparallela per un estremo della base*, e sarà sempre sottinteso: *ad un lato.*

Nel triangolo isoscele *l'antiparallela per il vertice è eguale alla sua stessa distanza, l'antiparallela per un estremo della base è eguale alla base medesima.*

Per le proprietà anzidette del triangolo isoscele e l'eguaglianza dei lati, i teoremi generali, applicati a questo triangolo, danno luogo a proprietà particolari e, usando quanto più è possibile la nomenclatura ordinaria, si riducono a forme speciali comode per le applicazioni.

57. — *Teorema. — Se in un triangolo un angolo è doppio di un altro: 1° il lato opposto all'angolo minore è m. p. fra il lato opposto all'angolo maggiore e la differenza fra questo e la bisettrice di questo angolo; 2° il lato opposto all'angolo maggiore è eguale al prodotto degli altri due diviso per la bisettrice del*



loro angolo; ovvero: *la bisettrice dell'angolo maggiore è eguale al prodotto dei lati di quest'angolo, diviso pel terzo lato.*

Questo teorema doppio è la riduzione del teorema 29 e del 38.

Digitized by Google

58. — *Teorema. — Il lato del triangolo isoscele è m. p. fra la base e l'antip. pel vertice.*

Infatti, nel triangolo isoscele ABC (fig. 6) sia BD l'antip. del lato AB; si ha (29) $\overline{BC}^2 = AC \times DC$; e siccome (37) $BD = DC$, sarà $\overline{BC}^2 = AC \times BD$.

59. — *Teorema. — La base di un triangolo isoscele è m. p. fra il lato e la distanza dell'antip. per un estremo della medesima*; ovvero: *L'antiparallela per un estremo della base del triangolo isoscele è m. p. fra la sua distanza e il lato.*

Sia $\overline{AE}$ antip. AB (fig. 6); è (29) $\overline{AC}^2 = BC \times EC$; e, siccome (56) $AC = AE$, si ha: $\overline{AE}^2 = BC \times EC$.

60. — Tenendo presente che l'antip. alla base per un estremo della medesima è la stessa base, la riduzione del teorema 31 dà luogo allo stesso teorema 58, perchè (fig. 6) fornisce: $AC : BC = BC : BD$, cioè $\overline{BC}^2 = AC \times BD$. La riduzione del teorema 32 invece dà luogo al teorema 59: infatti esso fornisce: $\overline{AB}^2 : \overline{AC}^2 = BC : EC$, da cui $AC^2 = AB \times EC$. Il teorema 38, applicato all'antip. per un estremo della base, porta ad una identità; applicato all'antip. pel vertice, porta al teorema 58.

61. — *Teorema. — Nel triangolo isoscele i cubi del lato e dell'antip. per un estremo della base sono proporzionali all'antip. pel vertice e alla distanza della prima.*

Infatti, (fig. 6) pel teorema 34 si ha $\overline{CB}^3 : \overline{CA}^3 = CD : CE$,

62. — *Teorema. — Nel triangolo isoscele il rettangolo della base e di un lato è equivalente al rettangolo dell'antip. pel vertice e della distanza dell'antip. per un estremo della base*; ovvero: *il rettangolo di un lato e dell'antip. per un estremo della base è equivalente al rettangolo della distanza di questa e dell'antip. pel vertice.*

Infatti dal teorema 35 si ha: $CB \times CA = CD \times CE$, ovvero: $CB \times AE = EC \times BD$.

63. — *Il teorema 40 applicato all'antip. pel vertice, ci dà il teorema 58; applicato all'antip. per un estremo della base, porta al teorema 62.*

64. — *Teorema. — Nel triangolo isoscele il rettangolo della base e di un'antip. al lato è equivalente al rettangolo della distanza di questa e del lato.*

Sia FG una antip. di AB (fig. 6); siccome la base è antip. di se stessa, il 43 fornisce: $AC \times FG = CG \times BC$.

Nota. — Il teorema 59 è caso particolare di questo.

Digitized by Google

65. — Il teorema 44, applicato all'antip. pel vertice del triangolo isoscele, porta ad una identità; applicato all'antip. per un estremo della base, ci dà il teorema 59.

66. — Il teorema 46, applicato al lato, si riduce al teorema 58; applicato alla base, ci dà un'identità.

67. — *Teorema. — Se da un punto di un lato di un triangolo isoscele si conducono l'antip. all'altro lato e la corda parallela alla base, il rettangolo delle medesime è equivalente al rettangolo dei due segmenti, in cui il punto divide il lato.*

Sia GF antip. di AB (fig. 6) e GH parallela ad AC; GH possiamo considerarla anche come antip. di AC (caso limite), perciò il teorema 51 fornisce: $GF \times GH = GB \times GC$.

68. — *Corollario. — Se da un estremo della base del triangolo isoscele si conduce l'antip. e dall'estremo di questa la corda parallela alla base, il rettangolo di questa corda e dell'antip.* (ovvero *della base*) *è equivalente al rettangolo delle parti in cui l'estremo dell'antip. divide il lato.*

Sia AE antip. di AB e EL parallela ad AC, si ha $EA \times EL = EC \times EB$.

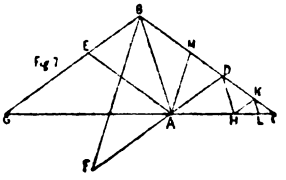
69. — L'antiparallela ad un lato di un triangolo isoscele per uno dei vertici forma con le rette dell'altro lato e della base (37) un triangolo simile al primo e quindi isoscele, e con la retta dello stesso lato e quella del lato opposto al vertice, dal quale essa antiparallela esce, forma generalmente un triangolo scaleno; se l'angolo al vertice è maggiore di $\frac{\pi}{3}$ l'antip. al lato pel vertice incontra la base, e quella per l'estremo della base incontra il prolungamento del lato; se l'angolo al vertice è minore di $\frac{\pi}{3}$, l'antip. pel vertice incontra il prolungamento della base, quella per l'estremo della base incontra il lato; perciò, servendoci di una frase analoga ad un'altra comunemente accettata, diremo: l'*antiparallela per uno dei vertici ad un lato del triangolo isoscele divide, generalmente il triangolo internamente o esternamente, in un triangolo isoscele e un triangolo scaleno.*

Ora proponiamoci di trovare in quali casi l'antip. suddetta divide il triangolo isoscele, internamente o esternamente in due triangoli isosceli; e supponiamo che ciò si verifichi nel triangolo isoscele ABC di base BC (fig. 7); esaminiamo tutti i casi possibili:

Digitized by Google

a) Sia l'$A > \frac{\pi}{3}$ e AD l'antip. di AB; sappiamo che il triangolo ADC è simile ad ABC, perciò è isoscele, e che $D\hat{A}C = A\hat{B}C = \hat{C}$ e $A\hat{D}C = B\hat{A}C$: quando anche il ABD è isoscele, la base non può essere BD, perchè sarebbe AB = AD = AC; non può essere AB, perchè sarebbero eguali i due triangoli ABD e ACD, ciò che si verifica soltanto nel triangolo rettangolo isoscele; dunque la base sarà AD, e allora dev'essere $B\hat{D}A = B\hat{A}D$, ma $B\hat{D}A = D\hat{A}C + \hat{C}$, quindi $B\hat{A}D = 2\,\hat{C}$, e perciò l'$B\hat{A}C = 3\,\hat{C}$.

Dunque possiamo asserire che: *affinchè l'antip. pel vertice divida internamente il triangolo isoscele in due triangoli isosceli, è necessario e sufficiente che l'angolo al vertice sia triplo dell'angolo alla base.*



b) — Nel triangolo isoscele ABC sia BG antip. di AB; il triangolo GBC è simile ad ABC, quindi è isoscele ed è $G\hat{B}C = B\hat{A}C$ e $B\hat{G}A = \hat{C}$; quando il triangolo ABG è isoscele, non può essere BG la base, perchè sarebbero eguali i due triangoli ABG e ABC, ciò che si verifica soltanto nel triangolo rettangolo isoscele; non può essere $\overline{AG}$, perchè sarebbe $B\hat{G}A = B\hat{A}G$ e quindi $B\hat{A}G = \hat{C}$; dunque dev'essere AB la base, e allora sarà $G\hat{B}A = B\hat{A}G$; ma $B\hat{A}G = 2\,\hat{C}$, perciò sarà $G\hat{B}C = 3\,\hat{C}$, ed in conseguenza sarà anche $B\hat{A}C = 3\,\hat{C}$. — Dunque diremo: *affinchè l'antip. per un estremo della base divida esternamente il triangolo isoscele in due triangoli isosceli, è necessario e sufficiente che l'angolo al vertice sia triplo dell'angolo alla base.*

c). — Sia dato invece il triangolo isoscele AGB di base AB, e sia $G < \frac{\pi}{3}$, sia AE antip. di AG; AEB è triangolo isoscele di base EB, perchè $B\hat{E}A = B\hat{A}G$ e perciò $B\hat{E}A = E\hat{B}A$, e $B\hat{A}E = \hat{G}$; allorchè AEG è triangolo isoscele, la base dev'essere AG, perchè se fosse GE, sarebbe AG = AE = AB, se fosse AE, sarebbe AG = GE = GB: dunque quando AEG è triangolo isoscele, dev'essere $E\hat{G}A = E\hat{A}G$, e perciò dev'essere $B\hat{E}A = 2\,A\hat{G}E$,

Digitized by Google

e quindi ABC = 2 AGE. — Dunque: *affinchè l'antip. per un estremo della base divida internamente il triangolo isoscele in due triangoli isosceli, è necessario e sufficiente che l'angolo al vertice sia metà dell'angolo alla base.*

d). — Sia per ipotesi ABD un triangolo isoscele, e sia BF antip. di AB; il triangolo BDF sarà isoscele, e sarà $\hat{F} = A\hat{B}D$. $F\hat{B}D = BAD$; quando anche il triangolo ABF è isoscele, la base non può essere $\overline{AB}$, perchè sarebbe FA = FB = FD; non può essere AF, perchè sarebbe BF = BA = BD; perciò la base deve essere BF, e allora sarà $\hat{F} = A\hat{B}F$, quindi $B\hat{A}D = 2\hat{F} = 2A\hat{B}D$. E siccome $B\hat{A}F = A\hat{B}D + B\hat{D}A = \hat{F} + 2\hat{F}$, perciò $BA\hat{F} = 3\hat{F}$. Dunque: *affinchè l'antip. pel vertice divida esternamente il triangolo isoscele in due triangoli isosceli, è necessario e sufficiente che l'angolo al vertice sia metà dell'angolo alla base.*

70. — *Scolio.* — *Se un triangolo isoscele ha l'angolo al vertice triplo o metà dell'angolo alla base, l'antip. per uno dei vertici lo divide internamente o esternamente in due triangoli isosceli aventi l'angolo al vertice l'uno triplo, l'altro metà dell'angolo alla base.*

71. — *Teorema* (generale delle antiparallele auree). — *Se l'angolo al vertice di un triangolo isoscele è triplo o metà dell'angolo alla base, l'antip. per uno dei vertici divide internamente o esternamente il lato opposto in media ed estrema ragione.*

E propriamente abbiamo in particolare i due seguenti teoremi:

72. — *Teorema* (particolare 1° delle antip. auree). — *Se l'angolo al vertice di un triangolo isoscele è triplo dell'angoto alla base, l'antip. pel vertice divide la base in media ed estrema ragione, la parte aurea è eguale al lato; l'antip. per un estremo della base divide esternamente il lato in media ed estrema ragione la parte aurea è eguale alla base.*

Sia ABC un triangolo isoscele di base BC (fig. 7), sia $\hat{A} = 3\hat{B}$, sia $\overline{AD}$ antip. di AB; è (29) $\overline{AC}^2 = BC \times CD$, ed è AC = AB = BD (70). — Sia BG antip. di AB, è $\overline{BC}^2 = AC \times GC$: ma BC = BG = AG.

73. — *Teorema* (particolare 2° delle antip. auree). — *Se l'angolo al vertice di un triangolo isoscele è metà dell'angolo alla base, l'antip. per un estremo della base divide il lato in media ed estrema ragione, la parte aurea è eguale alla base; l'antip. pel vertice divide esternamente la base in media ed estrema ragione, la parte aurea è eguale al lato.*

Digitized by Google

Sia ABD (fig. 7) un triangolo isoscele avente l'$A\hat{D}B = 2\,A\hat{B}D$ e sia $\overline{AM}$ l'antip. di $\overline{AB}$; si ha: $\overline{AD}^2 = BD \times DM$, ma è $\overline{AD} = AM = MB$. — Sia BF antip. di AB, sarà $\overline{BD}^2 = DA \times DF$, ma è $BD = AB = AF$.

74. — *Teorema* (reciproco del 72). — *Se il lato di un triangolo isoscele è eguale alla parte aurea della base, l'angolo al vertice è triplo dell'angolo alla base.*

Infatti, sia BD la parte aurea del segmento BC (fig. 7) e sia ABC un triangolo avente $AB = AC = BD$; il triangolo ABD è pure isoscele e perciò $B\hat{A}D = B\hat{D}A = D\hat{A}C + D\hat{C}A$; e, siccome $\overline{BD}^2 = BC \times DC$, si ha: $BC : AC = AC : DC$, perciò i due triangoli CAB e CAD sono simili e quindi il triangolo CAD è isoscele, e in conseguenza $D\hat{A}C = \hat{C}$; dunque $\hat{B}AD = 2\,\hat{C}$, quindi $B\hat{A}C = 3\,\hat{C}$.

75. — *Teorema* (reciproco del 73). — *Se la base di un triangolo isoscele è uguale alla parte aurea del lato, l'angolo al vertice è metà dell'angolo alla base.*

Infatti, se GE è la parte aurea del segmento BG e se ABG è triangolo isoscele avente la base $AB = GE$, avremo: $GB : AB = AB : BE$, quindi ABE e GAB sono triangoli simili e perciò $B\hat{A}E = A\hat{G}B$, ed $AB = AE$; perciò $AE = GE$, in conseguenza $E\hat{A}G = A\hat{G}B$ e quindi $B\hat{A}G = 2\,A\hat{G}B$.

76. — Due lati e la diagonale del pentagono regolare formano un triangolo isoscele avente l'angolo al vertice triplo dell'angolo alla base, perciò: *Teorema. — Il lato del pentagono regolare è uguale alla parte aurea della diagonale.*

77. — Il triangolo che ha per base il lato del decagono regolare e per vertice il centro del cerchio circoscritto è triangolo isoscele avente l'angolo al vertice metà dell'angolo alla base, perciò si ha il notissimo *Teorema. — Il lato del decagono regolare è uguale alla parte aurea del raggio del cerchio circoscritto.*

78. — *Problema. — Data la diagonale costruire il pentagono regolare.*

Risoluzione: si costruisca il triangolo isoscele avente i lati eguali alla diagonale e la base uguale alla sua parte aurea, su ciascuno dei lati si costruisca il triangolo isoscele avente i lati eguali a detta parte aurea.

79. — Fu già detto che se due corde sono rispettivamente parallele a due corde antiparallete, sono antiparallele fra loro; una corda parallela ad una di esse è antip. all'altra; quindi *se son*

Digitized by Google

date due corde antiparallele e dall'estremo di una di esse si tira la parallela all'altro, e dall'estremo della nuova corda si tira la parallela a quell'altra, e così di seguito, due di queste corde consecutive sono antiparallele fra loro; e perciò la distanza dell'estremo comune a due di esse è m. p. fra le distanze degli altri due estremi.

Sia AD antiparallela di AB (fig. 7) e sia DH parallela ad AB, HK parallela ad AD, KL parallela ad AB, ecc.; le coppie di corde consecutive AD e DA, DH e HK, HK e KL, ecc. sono coppie di corde antiparallele; e perciò $\overline{AC}^2 = BC \times DC$, $\overline{DC}^2 = AC \times HC$, $\overline{HC}^2 = DC \times KC$, ecc.

80. — Ora, per ipotesi. sia BD la parte aurea di BC (fig. 7) e sia $AC = AB = BD$; il triangolo isoscele ABC ha l'ang. al vertice triplo dell'ang. alla base (74), AD è antip. AB; ADC è pure triangolo isoscele (37) avente l'ang. al vertice triplo dell'ang. alla base, e quindi (72) $\overline{DC}$ è la parte aurea di AC, ossia di BD; dunque si può asserire il seguente:

Teorema. — Se un segmento è diviso in media ed estrema ragione, la seconda è uguale alla parte aurea della prima.

81. — E, sempre nelle ipotesi fatte ai nn. 79 e 80 sulla fig. 7, osservo che DHC è triangolo isoscele avente l'ang. al vertice triplo dell'ang alla base (37), perciò HC è uguale alla parte aurea di DC; ma $HC = AC - AH = BD - DC$, quindi si ha la seguente proposizione (che è anche conseguenza immediata del T. 80); *Corollario. — Se un segmento è diviso in media ed estrema ragione, la loro differenza è uguale alla parte aurea della seconda.*

82. — Queste proprietà del taglio aureo dimostreremo anche algebricamente. — Siano b e c la media e l'estrema ragione di un segmento a, dico che c è uguale alla parte aurea di b, cioè dimostreremo che se per ipotesi $a = b + c$, e $b^2 = a\,c$, ne viene di conseguenza che $c^2 = bd$, ove $d = b - c$.

Infatti, $c^2 = (a-b)^2 = a^2 - 2\,a\,b + b^2$; ma per ipotesi $b^2 = a\,c$, cioè $b^2 = a\,(a-b) = a^2 - a\,b$, da cui $a^2 = b^2 + ab$; e sostituendo nella prima equazione avremo: $c^2 = b^2 + ab - 2\,a\,b + b^2 = 2b^2 - ab$; si ha pure $b\,d = b\,(b-c) = b^2 - bc = b^2 - b\,(a-b) = b^2 - ab + b^2 = 2b^2 - ab$; dunque $c^2 = bd$.

Ora, per questo teorema, d è uguale alla parte aurea di c; dunque: *la differenza fra la media e l'estrema ragione di un segmento è uguale alla parte aurea della seconda.*

83. — *Definizione. — Chiameremo successione aurea una*

Digitized by Google

successione di segmenti (o di numeri) *tali che uno qualunque di essi è uguale alla parte aurea del precedente.*

In questa successione, per le proposizioni 80 e 81, un elemento è uguale alla differenza dei due elementi che lo precedono, e quindi è uguale alla somma dei due elementi che lo seguono; indicando con s un segmento e con a la sua parte aurea (che chiameremo *elementi fondamentali*), la successione aurea avrà la forma seguente:

$$\ldots\ldots, 13s+8a, 8s+5a, 5s+3a, 3s+2a, 2s+a, s+a, s, a,$$
$$s-a, 2a-s, 2s-3a, 5a-3s, 5s-8a, 13a-8s, \ldots\ldots$$

84. — Considerando divisa questa successione in due sezioni: una (*crescente*) verso sinistra dal punto di separazione degli elementi fondamentali, l'altra (*decrescente*) verso destra; e convenendo che nell'elemento fondamentale s il coefficiente di a è zero, e nell'elemento fondamentale a il coefficiente di s è zero, per la costruzione della successione, dati s e a si ha la seguente:

Regola. — 1° *Ogni elemento è formato di due termini: uno in* s, *l'altro in* a, *tutti due positivi nella sezione crescente, uno positivo* (s *negli elementi di posto pari*, a *in quelli di posto dispari*) *e l'altro negativo nella sezione decrescente;* 2° *i coefficienti dei termini di un elemento sono: uno eguale alla somma dei coefficienti dei termini dell'elemento precedente, l'altro eguale al più grande di essi;* 3° *il coefficiente maggiore in un elemento della sezione crescente è quello di* s, *nella sezione decrescente è* (in valore assoluto) *quello di* a.

Quindi, essendo gli stessi i coefficienti dei termini dei due elementi ad egual distanza dai fondamentali, essi per ciascuna sezione saranno: 1° (1 ; 0), 2° (1 + 0 ; 1), 3° (1 + 1 ; 1), 4° (2 + 1 ; 2), 5° (3 + 2 ; 3), 6° (5 + 3 ; 5), 7° (8 + 5 ; 8), 8° (13 + 8 ; 13), ecc.

85. — È noto che il problema del taglio aureo algebricamente si risolve con un'equazione di 2° grado, le cui radici sono: $x' = s\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ e $x'' = -s\frac{\sqrt{5}+1}{2}$; la seconda non è accettabile, ma, generalizzando il problema, si dice che x' è la parte aurea del segmento s diviso *internamente* in media ed estrema ragione, x'' (in valore assoluto) è la parte aurea di s diviso *esternamente* come avanti.

Questa nomenclatura è giustificata dal fatto che, essendo x'' negativo, lo si deve tracciare in senso opposto a x', cioè in prolungamento di s; allora x'' (in valore assoluto) è, nel significato

Digitized by Google

geometrico del taglio aureo, la parte aurea del segmento $\left(s + s\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$, cioè del segmento $s\frac{\sqrt{5}+3}{2}$; ed infatti è:

$$\left(\pm s\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)^2 = s\frac{\sqrt{5}+3}{2} \times s, \text{ ovvero anche } s\frac{\sqrt{5}+1}{2} = s\frac{\sqrt{5}+3}{2} \times \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Con questa generalizzazione possiamo inoltre enunciare le seguenti proprietà della successione aurea: un elemento è uguale alla parte aurea del precedente diviso internamente in media ed estrema ragione, ed è uguale alla parte aurea del successivo diviso esternamente come innanzi; perciò un elemento è uguale al prodotto del precedente per $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, e quindi è uguale al quoziente del successivo per $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$; di tre elementi consecutivi il secondo ed il terzo sono la media e l'estrema ragione del primo, diviso internamente o esternamente, secondo che sono considerati in ordine decrescente o crescente; quindi un elemento è m. p. fra i due elementi contigui.

Con ciò possiamo costruire la successione aurea in funzione di s come appresso, la quale, se s è un numero è più comoda della precedente in pratica.

$$\ldots\ldots, s\frac{8\sqrt{5}+13}{2}, s\frac{5\sqrt{5}+11}{2}, s\frac{3\sqrt{5}+7}{2}, s\frac{2\sqrt{5}+4}{2}, s\frac{\sqrt{5}+3}{2},$$

$$s\frac{\sqrt{5}+1}{2}, s, s\frac{\sqrt{5}-1}{2}, s\frac{3-\sqrt{5}}{2}, s\frac{2\sqrt{5}-4}{2}, s\frac{7-3\sqrt{5}}{2},$$

$$s\frac{5\sqrt{5}-11}{2}, s\frac{18-8\sqrt{5}}{2}, \ldots\ldots$$

I termini del coefficiente di due elementi ad egual distanza dall'elemento fondamentale s sono gli stessi in valore assoluto, ed è facile dedurre la regola per la loro formazione.

Corato, agosto 1926.

(continua).

Digitized by Google

Sopra una certa trasformazione birazionale dello spazio a 4 dimensioni (*)

DI

ODOARDO FRANCESCHI.

6. — Cerchiamo le varietà di S'_4 che corrispondono agli elementi fondamentali di S_4.

Ad un iperpiano variabile condotto pel punto fondamentale 0 corrisponde la ipersuperficie:

$$\{(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3) M' + \lambda_4 M'_4\} x'_5 M' = 0,$$

la quale si spezza nella ipersuperficie fissa che risulta dall'associare l'iperpiano $x'_5 = 0$ col cono $M' = 0$, e nel cono di ordine m e di vertice $0'$:

$$(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3) M' + \lambda_4 M'_4 = 0$$

variabile in un sistema lineare ∞^3, projettivo al sistema degli iperpiani di S_4 passanti per 0. Ad una retta variabile, uscente dal punto 0, corrisponde il luogo rappresentato dal sistema:

$$\begin{cases} \{(\lambda_1 x'_1 + \lambda_2 x'_2 + \lambda_3 x'_3) M' + \lambda_4 M'_4\} x'_5 M' = 0 \\ (\mu_1 x'_1 + \mu_2 x'_2 + \mu_3 x'_3) x_5 M'^2 = 0 \\ (\nu_1 x'_1 + \nu_2 x'_2) x'_5 M'^2 = 0, \end{cases}$$

il quale si spezza nella ipersuperficie fissa, composta dell'iperpiano $x'_5 = 0$ e del cono $M' = 0$, e in due rette uscenti da $0'$, l'una (la retta $0'P'$) $(m-1)$-pla fissa, l'altra semplice, variabile in un sistema ∞^3, corrispondente al sistema delle rette di S_4 uscenti dal punto 0. Dunque:

Al punto fondamentale 0 *corrisponde il monoide composto dell'iperpiano* $x'_5 = 0$ *e del cono* $M' = 0$, *il quale appartiene all'Iacobiana del sistema* (2) *come ipersuperficie sestupla; al sistema delle rette per* 0 *corrisponde il sistema delle rette per* 0'.

Si riconosce facilmente che al punto P corrisponde il cono $^{m(m-1)}K'$, contato due volte, e alla retta OP, la ipersup. conica $M' = 0$.

(*) Continuazione della Nota dal medeeimo titolo in *Rassegna* A VII, pag. 73.

Digitized by Google

Alla superficie fondamentale $^{m+1}\Sigma$ corrisponde il luogo rappresentato da:

$$\Phi'_5 = 0, \quad x'^{m+1}_5 . M'^{2m-1} . \Phi'_Q . \Phi'_5 = 0;$$

poichè i due luoghi:

$$\Phi'_5 = 0, \; x'^{2}_5 . M'^{2} . \Phi'_5 = 0$$

$$\Phi'_5 = 0, \quad x'^{m-1}_5 . M'^{2m-3} . \Phi'_Q = 0$$

il primo rappresenta la falda $^{1}\Sigma$, il secondo la falda ^{m-1}M.

Dunque: *Alla superficie fondamentale* $^{m+1}\Sigma$ *corrisponde la ipersuperficie conica* $\Phi'_5 = 0$, *la quale rappresenta pure la falda* $^{1}\Sigma$; *l'altra falda è rappresentata dalla superficie, immersa in* $\Phi'_5 = 0$ *che risulta composta delle* $^{2m}\Sigma'$ *ed* $^{m(m-1)}K'^{2}$ *(fondamentali in* S'_4*), contate rispettivamente* $m - 1$ *e* $2m - 3$ *volte, e del cono* $\Phi'_Q = \Phi'_5 = 0$ *di vertice* $0'$ *e ordine* $4m(m-1)$, *il quale si spezza uel cono* $^{m(m-1)}K'$, *contato due volte, e in una parte residua di ordine* $2m(m-1)$, *appartenente all'Jacobiana di (2) come superficie doppia.*

Al cono fondamentale $^{m(m-1)}K$ corrisponde il luogo:

$$x'_4 x'^{m}_5 . M'^{2m-1} . \Phi'_Q = 0, \quad x'^{m-1}_5 . M'^{2m-3} . \Phi'_Q = 0.$$

Dunque: *al cono fondamentale* $^{m(m-1)}K$, *esclusi il punto 0 e la generatrice* OP *corrisponde il sistema* $\Phi'_Q = 0$. La curva $^{m(m-1)}C$ *è rappresentata dalla superficie conica* $\Phi'_Q = \Phi_5 = 0$, *di vertice* $0'$ *e di ordine* $4m(m-1)$, *la quale si spezza in* $2(m-1)$, *coni spaziali, ciascuno di ordine* $2m$.

7. — Possono enunciarsi i risultati seguenti:

Al gruppo delle $2(m-1)$ *generatrici variabili del cono* $^{m(m-1)}K$ *che appartengono alla linea* $^{2(2m-1)}L$, *corrisponde in* S'_4 *un sistema di* $2m-1$, *piani uscenti dalla retta* $0'P'$, *intersezione del sistema di iperpiani* $\Phi'_Q = 0$, *con uno spazio (ordinario) variabile nella rete che ha per asse la retta stessa.*

Al gruppo dei $2(m-1)$ *punti variabili, che formà la intersezione di una linea* $^{2(2m-1)}L$ *colla linea* $^{m(m-1)}C$, *corrisponde un gruppo di* $4m(m-1)$ *rette per* $0'$, *il quale si decompone in* $2(m-1)$ *sistemi di* $2m$ *rette, che sono le traccie dei* $2(m-1)$ *piani, di cui sopra, sulla isuperficie conica,* $\Phi'_5 = 0$.

Al gruppo dei $2m$ *punti variabili nei quali una* $^{2(2m-1)}L$ *interseca la quadrica fondamentale* $^{1}\Sigma$ *corrisponde un gruppo di* $2m$ *punti della ipersuperficie conica* $\Phi'_5 = 0$, *situati in linea retta.*

Digitized by Google

Alla linea variabile $^{2m}L_1$, *intersezione di una superficie* ^{2m}S *colla quadrica fondamentale* $^{2}\Sigma$, *corrisponde una superficie, formata di una parte fissa, che è quella stessa che rappresenta la curva* $^{m(m-1)}C$, *e di una parte variabile, che è una superficie conica di vertice* 0' *e di ordine* 2 m, *sezione della ipersuperficie conica* $\Phi'_5 = 0$, *con un iperpiano uscente dal punto* 0'.

Al gruppo dei 2 m (m - 1) *punti fissi, che dà la intersezione del cono fondamentale* $^{m(m-1)}K$ *e della quadrica fondamentale* $^{2}\Sigma$, *corrisponde la superficie che rappresenta la curva* $^{m(m-1)}C$.

Le precedenti varietà di S'_4 appartengono tutte all'Jacobiana di (2) con ordini di moltiplicità facili a determinarsi.

8. — Considerazioni analoghe a quelle svolte al principio del n. 6, portano intanto a concludere che:

Al punto fondamentale 0' corrisponde lo spazio ordinario $x_5 = 0$ *il quale appartiene all'Jacobiana di* (1) *come ipersuperficie tripla; al sistema delle rette per 0' corrisponde il sistema delle rette per 0.*

Si riconosce poi subito che il cono $M = 0$ è la immagine in S_4, tanto del punto P', quanto della retta $O'P'$.

Alle falde $^{2m}\Sigma'$ ed $^{m(m-1)}K'$ della superficie fondamentale (*) del sistema (2) corrispondono rispettivamente i luoghi:

$\Phi_5 . M = 0$, $x_5{}^{2m} . M^{2(m-1)} . \Phi'^{2}_{\varrho} . \Phi_5 = 0$, e
$x_5{}^{m-1} . M^{m-2} . \Phi_p = 0$, $x_4 . x_5{}^{m} . M^{m-1} . \Phi_p = 0$. Dunque:

Alla falda $^{2m}\Sigma'$ *della superficie fandamentale, escluso il punto* P' *corrisponde la ipersupeifície conica quadrica di vertice* 0; *data da* $\Phi_5 = 0$; *alla falda* $^{m(m-1)}K'$, *esclusi il vertice* 0' *e la generatrice* O'P' *corrisponde il sistema di iperpiani* $\Phi_p = 0$.

Si ha inoltre: *Alla curva* $^{m(m-1}C'$ *corrisponde la varietà che risulta dall'associare la ipersuperficie conica* $M = 0$, *la superficie fondamentale* $^{2}\Sigma$ *e la superficie conica* $\Phi_5 = \Phi_p = 0$ *di vertice* 0 *e di ordine* 4 (m — 1), *la quale si spezza in* 2 (m — 1) *coni quadrici spaziali.*

La precedente varietà, contata due volte, dà la intersezione dei due luoghi che rappresentano le due falde della superficie fondamentale del sistema (2).

9. — Possono enunciarsi i risultati seguenti:

Al gruppo delle 2 (m — 1) *generatrici doppie variabili del cono* $^{m(m-1)}K'^{2}$ *che fanno parte della linea* $^{2(3m-2)}L'$, *corrisponde in* S_4

(*) La seconda falda si considera come semplice.

Digitized by Google

un sistema di 2 (m — 1) *piani doppi, uscenti dalla retta* OP, *intersezione del sistema di iperpiani doppî* $\Phi_p = 0$ *con uno spazio (ordinario) variabile nella rete che ha per asse la retta stessa. Al gruppo dei* 2 *(m — 1) punti doppî variabili, che forma la intersezione di una linea* $^{2(3m-2)}L'$ *colla* $^{m(m-1)}C'^{2}$, *corrisponde un gruppo di* 4 (m — 1) *rette doppie per* 0, *il quale si decompone in* 2 (m — 1) *coppie di rette (doppie), traccie del cono quadrico* $\Phi_5 = 0$, *sui* 2 (m — 1) *piani doppî su-nominati.*

Al gruppo dei 2 (2 m — 1) *punti variabili, nei quali una* $^{2(3m-2)}L'$ *interseca la falda* $^{2m}\Sigma'$ *della superficie fondamentale, corrisponde una coppia di punti del cono quadrico* $\Phi_5 = 0$.

Alla linea variabile $^{2m}L'_1$ *intersezione di una superficie* $^{2m}S'$ *colla falda* $^{2m}\Sigma'$ *della superficie fondamentale, corrisponde una superficie conica variabile, del* 2^0 *ordine e di vertice* 0 *sezione del cono quadrico* $\Phi_5 = 0$ *con un iperpiano uscente dal punto* 0.

Le precedenti varietà di S_4 appartengono all'Iacobiana di (1) con ordini di moltiplicità facili a calcolarsi.

10. Se indichiamo rispettivamente con I_1, $^{m-1}I_2$, $^{2(m-1)}I_3$, $^{2}I_4$ l'iperpiano $x_5 = 0$ e le ipersuperfici coniche $M = \Phi_p = \Phi_5 = 0$, e con $^{m}I'_1$, $^{2(m-1)}I'_2$, $^{2m}I'_3$ il monoide $x'_5 . M = 0$ e le ipersuperfici coniche $\Phi'_p = \Phi'_5 = 0$, i risultati ottenuti si raccolgono nei due quadri che seguono:

$$
S_4 \begin{cases}
0^m \quad P^{m-2} \quad {}^{m(m-1)}C \equiv P^{(m-1)(m-2)} \quad \bigwedge^{(m-1)(m-2)} \equiv \\
\equiv (0^{(m-1)(m-2)}, \quad P^{(m-1)(m-2)}) \quad {}^{m+1}\Sigma \equiv (P^{m-2}, \quad {}^{2}\Sigma, \quad {}^{m-1}M) \\
{}^{m(m-1)}K \equiv (0^{m(m-1)}, \quad \bigwedge^{(m-1)(m-2)}, \quad L_1, L_2, \ldots, L_{2(m-1)}, \\
{}^{m(m-1)}C) \quad L' \equiv {}^{2(2m-1)}L \equiv (0^{3m-2}, \quad L_1 \; L_2, \ldots, \quad L_{2(m-1)}, \\
{}^{2m}L) \quad {}^{2m}L \equiv 0^m \quad S' \equiv {}^{2m}S \equiv 0^m \quad {}^{2(2m-1)}L. \\
{}^{m(m-1)}C = {}^{2(m-1)} \quad {}^{3(2m-1)}L. \quad {}^{2}\Sigma = {}^{2m} \quad {}^{2m}S. \quad {}^{2}\Sigma = {}^{2m}L_1 \\
{}^{m-1}M . \; {}^{m(m-1)}K = {}^{m(m-1)}C \quad {}^{2}\Sigma . \; {}^{m(m-1)}K = {}^{3}\Sigma . \\
{}^{m(m-1)}C = {}^{2m(m-1)} \quad {}^{5m}I \equiv (0^{5m-3}, \quad P^{5(m-1)}, \quad {}^{2}\Sigma^4, \quad {}^{m-1}M^6 \\
{}^{m(m-1)}K^4, \quad \bigwedge^{5m-8}, \quad {}^{m(m-1)}C^7) \equiv
\end{cases}
$$

$$
\equiv \begin{cases}
I^3_1 \equiv (P^2, \quad {}^{2}\Sigma^3, \quad {}^{m-1}M^3, \quad {}^{m(m-1)}C^3) \equiv 0' \\
{}^{m-1}I_2{}^3 \equiv (0^{3m-1}, \quad P^{3(m-2)}, \quad {}^{m-1}M^3, \quad {}^{m(m-1)}K^2, \\
\bigwedge^{3(m-2)}, \quad {}^{m(m-1)}C^3) \\
{}^{2(m-1)}I_3 \equiv (0^{2(m-1)}, \quad P^{2(m-1)}, \quad {}^{m(m-1)}K, \quad \bigwedge^{2(m-1)}, \\
{}^{m(m-3)}C) \equiv {}^{m(m-1)}K' \\
{}^{3}I_4 \equiv (0^2, \quad {}^{2}\Sigma) \equiv {}^{2m}\Sigma'
\end{cases}
\equiv \begin{cases} P' \\ O'P' \end{cases}
$$

Digitized by Google

$$
S'_4 \begin{cases}
0'^{2\,m-1}\ P'^{2(m-1)}\ {}^{m(m-1)}C'^{2} \equiv P'^{3(m-1)(m-2)}\ \Lambda'^{2(m-1)(m-2)} \equiv \\
\equiv (0'^{2(m-1)(m-2)},\ P'^{2(m-1)(m-2)})\ {}^{2m}\Sigma' \equiv (P'^{2(m-1)}\ {}^{m(m-1)}C'^{2}) \\
{}^{m(m-1)}K'^{2} \equiv (0'^{2m(m-1)},\ \Lambda'^{2(m-1)(m-2)},\ L'^{2}_{1},\ L'^{2}_{2},\ \ldots, \\
L'^{2}_{2(m-1)},\ {}^{m(m-1)}C'^{2})\ L \equiv {}^{2(3m-2)}L' \equiv (0'^{5m-4},\ L'^{2}_{1},\ L'^{2}_{2},\ \ldots, \\
L'^{2}_{2(m-1)},\ {}^{2m}L') \\
{}^{2m}L' \equiv 0'^{m}\quad S \equiv {}^{2m}S' \equiv 0'^{m}\quad {}^{2(3m-2)}L'.\quad {}^{m(m-1)}C' = {}^{2(m-1)} \\
{}^{2(3m-2)}L'.\quad {}^{2m}\Sigma' = {}^{2(2m-1)}\quad {}^{2m}S'.\ {}^{2m}\Sigma' = {}^{2m}L'_{1} \\
{}^{2m}L'_{1} \equiv P'^{2(m-1)} \\
7m-2\ I' \equiv (0'^{7m-5},\ P'^{5(m-1)},\ {}^{2m}\Sigma'^{4},\ {}^{m(m-1)}K'^{6},\ \Lambda'^{7m-10}, \\
{}^{m(m-1)}C'^{9}) \equiv
\end{cases}
$$

$$
\equiv \begin{cases}
{}^{m}I'^{3}_{1} \equiv (0'^{3(m-1)},\ P'^{3(m-1)},\ {}^{2m}\Sigma'^{3},\ {}^{m(m-1)}K'^{3},\ \Lambda'^{3(m-2)}, \\
{}^{m(m-1)}C'^{6}) \equiv 0 \\
{}^{2(m-1)}I'_{2} \equiv 0'^{2(m-1)},\ P'^{2(m-1)},\ {}^{m(m-1)}K',\ \Lambda'^{2(m-1)}, \\
{}^{m(m-1)}C') \equiv {}^{m(m-1)}K \\
{}^{2m}I'_{3} \equiv (0'^{2m},\ {}^{2m}\Sigma',\ {}^{m(m-1)}K'^{2},\ \Lambda'^{2(m-1)},\ {}^{m(m-1)}C'^{2}) \equiv \\
\equiv {}^{m+1}\Sigma.
\end{cases}
$$

Parma, 1 luglio 1926.

Digitized by Google

NOTE DIDATTICHE.

Un'altra costruzione sulla media armonica di due segmenti

Proponiamoci la risoluzione del seguente

PROBLEMA. — *Dati due segmenti* m, n *indicare una costruzione semplice per la determinazione di un terzo segmento x il quale sia medio armonico fra i primi due; dedurre da tale costruzione il luogo geometrico dei punti che hanno dai due estremi di* m, n *distanze proporzionali ai segmenti stessi.*

RISOLUZIONE. — Si costruisca il triangolo rettangolo avente per cateti i segmenti assegnati e si conduca inoltre la bisettrice dell'angolo retto; essa incontrerà la ipotenusa BC (*) nel punto H il quale sarà vertice del quadrato $ALHM$ col lato AL sopra i cateti $AB = m$, e l'altro AM sul cateto $AC = n$ (**). Cerchiamo di esprimere il lato l di esso in funzione di m, n segmenti assegnati.

Si ha, qualunque sia H su BC,

$$AB \times LH + AC \times HM = AB \times AC$$

e nel nostro caso, con le posizioni fatte,

$$m\,l + n\,l = m\,n$$

(*) Vedi mia Nota in *Rassegna di Matematica e Fisica* Anno VI N. 1 (pag. 21).

Avevo mandato da più giorni la presente Nota alla "*Rassegna*", allorchè il chiar.mo Prof. Cavallaro di Cefalù (col quale sono in corrispondenza amichevole), mi fa avvertito che lo spirito del presente mio lavoretto ha punti di contatto ben "delineati" con l'altro suo: "*Notevole rappresentazione geometrica delle formule classiche degli specchi sferici*", uscito in Bollettino di Mat. e Sc. fis. e nat., nell'anno 1914, N. 2. L'egr. amico soggiunge: "...Ci potrebbe essere qualche novità nel fatto che Ella deduce queste due proprietà dei gruppi armonici mediante l'impiego del triangolo rett. e della bisettrice dell'angolo retto".

In ogni modo, a me sembra che resti ancora una volta dimostrata l'importanza didattica di queste note che, se anche non conducono all'*assolutamente nuovo*, servono tuttavia a meglio lumeggiare un argomento e a dimostrare le diverse vie di ricerca di cui esso è suscettibile.

(**) Il cortese lettore è pregato di disegnare la figura.

Digitized by Google

$$l = \frac{m\,n}{m+n}$$

da cui, ponendo $2l = x$.

$$(1) \qquad x = \frac{2\,m\,n}{m+n}$$

la quale ci dice che " x è il medio armonico fra m ed n ".

Dopo quanto si è detto, è immediata la costruzione richiesta che possiamo ripetere e concludere così: " costruito il triangolo rettangolo di cateti $AB = m$, $AC = n$ e fissato il punto H come più sopra si è detto, basta abbassare su m la perpendicolare ottenendo L; riportando, a partire da L, sul prolungamento di AL un segmento $LG = AL = l$ si ha che $AG = x$ è il medio armonico richiesto.

È evidente la costruzione da fare per ottenere, per es. m noto x ed n.

Supponiamo $n > m$; sarà $n > x > m$. Con centro A e raggio eguale ad n si descriva un arco di cerchio fino ad incontrare il prolungamento di AL in Q. La (1) si trasforma nell'altra

$$n - x : x - m = n : m$$

e tenendo presente la costruzione di cui sopra

$$QG : BG = AQ : AB$$

I punti A, B, G, Q si dice che formano un " *sistema armonico* ". Ora dalla proposizione scritta, si deduce che per A e G passeranno le bisettrici di un angolo i cui lati passeranno per B, Q e siccome le bisettrici sono fra loro perpendicolari, il vertice dell'angolo starà su un cerchio di diametro AG il quale passerà per H. Cioè se X è un punto di tale cerchio, varrà la proposizione:

$$GQ : GB = QX : BX = AQ : AB$$

qualunque sia X.

Possiamo dunque concludere dicendo che " *il luogo dei punti che hanno da due punti dati distanze proporzionali a due segmenti dati, è il cerchio che ha per diametro il segmento compreso fra quei due punti che con i punti dati formano un sistema armonico ed hanno da questi distanze proporzionali ai due segmenti dati* ". Dato x ed uno dei segmenti m, n resta completamente determinato l'altro.

Consideriamo una posizione particolare di X, quello cioè per cui, detta T, risulta QT tangente al cerchio (*); è facile dimostrare allora che l'altro lato, TB, si dispone perpendicolarmente al diametro del cerchio, sostegno dei segmenti m, n, x.

Digitized by Google

Infatti l'angolo $A\hat{T}G$ è retto e così pure l'altro $L\hat{T}Q$. Ne risulta

$$A\hat{T}L = B\hat{T}G = GTQ = \alpha$$

allora

$$T\hat{L}B = 2\alpha$$

perciò $T\hat{B}L$ = *angolo retto* e TB è perpendicolare ad AQ. — Ne deriva che noto x (cioè due punti come A e G) restano fissate infinite coppie di altri due (come B e Q) formanti un sistema armonico; overo " noto x ed uno dei segmenti, m od n, resta completamente determinato l'altro „.

Prendiamo il solito cerchio di diametro x e consideriamo una posizione del lato tangente tale che il triangolo ACQ sia isoscele; diciamo pure T il punto di tangenza. I triangoli ACQ, TBQ sono simili: sarà rettangolo isoscele il triangolo TBQ e l'altro LTQ.

Conclusione: il punto T è il medio dell'arco HG e l'estremo B di m il medio fra il centro del cerchio e l'estremo Q di n.

È facile analizzare altre posizioni di T come quando, per es. coincida con G od H e che del resto si può fare tenendo presente la (1).

(*) Il cortese lettore è pregato di disegnare un'altra figura.

Pergola (Pesaro), agosto 1926.

Giulio Vici.

Trasformazione di un rettangolo

Si vuol *trasformare un rettangolo in un altro di lato assegnato per mezzo del primo teorema di Euclide.* Questo teorema, come si sa, permette di risolvere agevolmente il problema della trasformazione di un rettangolo in un quadrato; però per quanto mi sappia non si è mai notato che questo teorema è suscettibile di essere applicato alla trasformazione inversa d'un quadrato in un rettangolo di lato assegnato, e che perciò permette di risolvere senza ricorrere ad altri teoremi la trasformazione di un rettangolo in un altro di data base (od altezza).

Infatti, il primo teorema d'Euclide può essere enunciato nel modo seguente, che permette la trasformazione in parola:

" *Se da un punto esterno ad un circolo si conduce una tangente ad esso; il quadrato del raggio del circolo, che ha per estremo il punto di contatto equivale al rettangolo della congiungente il punto esterno col centro del circolo e della proiezione su di essa del raggio suddetto* „.

Ciò premesso si debba trasformare

$$r^2 = OP \cdot OH - OP \cdot l .$$

Il problema della trasformazione il quadrato di lato dato r in un rettangolo (equivalente) avente uno dei suoi lati di lunghezza assegnata l,

Costruita la circonferenza $O(r)$,

Digitized by Google

possono darsi i casi seguenti:

1) $l > r$; 2) $l = r$; 3) $l > r$.

1) Se $l > r$, condotta $OP = l$, sia PC una delle due tangenti da P alla circonferenza $O(r)$, il rettangolo di $OP(= l)$ e della proiezione OH del raggio OC su OP è per il primo teorema d'Euclide equivalente al quadrato di $OC(= r)$.

2) Se $l = r$, il rettangolo richiesto è il quadrato di l.

3) E infine, se $l < r$, condotta dal centro O della circ. $O(r)$ una semiretta OP, si prenda su questa $OH = l$, la perpendicolare HC ad OP avendo dal centro del circolo $O(r)$ una distanza $l < r$ incontrerà in un punto che diremo C la circ. $O(r)$, e la tangente CP alla circonferenza incontrerà per ovvie ragioni in un punto che diremo P, esterno alla circ. $O(r)$ e dalla stessa banda di H rispetto ad O la retta OP, e per il teorema di Euclide sarà

di un rettangolo in un altro avente una "dimensione„ assegnata si può allora risolvere trasformando prima il rettangolo dato in un quadrato mediante il teorema d'Euclide, e poi trasformando mediante il teorema stesso il quadrato ottenuto nel rettangolo equivalente della data "dimensione„.

Sarzana, ottobre 1926.

FEDERICO CHIAPPETTI.

Questione da risolvere.

In un triangolo qualunque, fra le aree delle superficie S_1, S_2 dei triangoli ottenuti conducendo le parallele a due lati da un punto qualunque preso sul rimanente, e quella S_3 del parallelogramma resultante, passa la relazione semplice:

$$S_3 = 2\sqrt{S_1 S_2}$$

Non sappiamo se tale relazione venne già osservata; ad ogni modo essa può essere feconda di applicazioni come faremo vedere in una prossima Nota.

Pergola (Pesaro), luglio 1927.

GIULIO VICI

Osservazioni sulle comuni concezioni dell'inerzia.

Circa tre anni fa, oltre che in una seduta della Società Italiana di Fisica, anche in una seduta di questa Sezione di Mathesis (1), è stato ampiamente discusso sulle comuni illustrazioni del terzo principio della Meccanica, non che della cosidetta Forza centrifuga.

Chi come me avendo avuto occasione di doversi preparare un corso di scuola media, ha potuto approfittare della Relazione sui due argomenti uscita nel N. Cimento e in diversi numeri della *Rassegna di Matematica e Fisica* (2) ha senza dubbio sentita dopo il grande disagio conseguente alla baraonda dei concetti esposti al riguardo nei diversi trattati, di meccanica da svolgere agli allievi il grande beneficio di quella esauriente e lucida trattazione, che segue alla non meno lucida o convincente critica.

Ricordo a proposito che l'A. per poter superare le non lievi difficoltà relative alla trattazione della forza centrifuga, ha dovuto in quella sua Relazione, ad un certo punto, prendere, come si suol dire posizione e chiarire che cosa nel seguito egli avrebbe inteso colle due espressioni *forza* e *reazione d'inerzia*.

(1) Lettura tenuta alla *Sezione Genovese* di *Mathesis* — Maggio 1925.

(2) *A Bernini* "Sulla forza centrifuga e sulle comuni illustrazioni del Principio dell'Azione e Reazione„. — *N. Cimento* 1925; *Rassegna* A. VI pag. 34. 104, 121.

Digitized by Google

Gli è che anche su queste locuzioni i numerosi trattati antichi e recenti facevano e fanno una tale confusione da rendere perplesso chiunque si appresti con spirito critico a rendere chiaro conto attraverso ad essi di ciò che debba effettivamente intendersi colla parola *inerzia*. E quanto male pei discepoli e per la Scuola è inutile qui dire.

Scopo di questa nota sarebbe precisamente quello di mettere in rilievo (in analogia collo scopo della Relazione sopra ricordata) i molteplici concetti, che a seconda dei diversi autori sono contenuti in questa parola: poichè a mio modo di vedere ciò potrà essere sufficiente a giustificare i dubbi, che si possono avere.

Passando in rassegna i numerosi testi italiani antichi e recenti ho veduto che a questo riguardo si potevano suddividere in diversi gruppi. Quindi piuttosto che riferire su ciascun autore, credo che potrà essere sufficiente il riferire su ciascun gruppo. Le parole che userò potranno anche non essere precisamente le tesse usate dall'uno o dall'altro autore, però esse ne rappresenteranno fedelmente l'unico concetto lecito da dedursi.

1) Alcuni introducono la parola *Inerzia* unicamente per dire che essa è una proprietà, e precisamente *quella che hanno tutti i corpi di conservare il loro stato di quiete e di moto rettilineo ed uniforme, sempre che non intervenga una causa (forza), che ne modifichi lo stato.* E in ciò essi affermano, consiste il cosidetto *principio di inerzia*. E la parola *inerzia* più non compare nei loro testi, se non per ricordare quanto ora detto.

2) Ma altri numerosi, che diremo del secondo gruppo, affermano anche, come quelli del primo gruppo, essere l'Inerzia una proprietà precisando che è l'*incapacità* dei corpi a mutare il loro stato. Ma poi in qualche altro punto del testo affermano che questa inerzia si può *vincere* con una forza.

Es. "*... i veicoli non si muovono se una forza ad es. animale non ne vince l'inerzia di quiete*". (Si può dubitare che l'autore qui abbia senza volere fatto tutt'uno della inerzia e degli inevitabili attriti).

Oppure "*... La forza centripeta applicata al corpo lo costringe a girare vincendo l'inerzia*".

Ora l'espressione "*vincere l'inerzia*" lasciando intendere che l'*inerzia* stessa debba potersi considerare come una forza, costituisce senza dubbio una *distinzione* rispetto al concetto espresso dagli autori del primo gruppo.

Ma l'espressione non mi sembra didatticamente opportuna: È vero che in molti punti dalla fisica si chiamano anche *proprietà attrattive* (o *repulsive*) il *Magnetismo* e l'*Elettricità*; e queste sì che possono essere annullate ed equilibrate da una forza uguale, od anche *vinte* da una forza maggiore. Ma fisicamente parlando il *vincere* una proprietà negativa (che esprime la *negazione* di un fenomeno come appunto l'*Inerzia*) non ha certo un significato chiaro; e la espressione appare una di quelle che hanno l'aria di voler dire qualche cosa, ma non dicono nulla, oppure dicono un errore.

Sarebbe chiaro didatticamente il dire: Lo zucchero vince la resistenza che offre il caffè ad essere dolcificato?

3) Ma altri ancora, che ho uniti in un terzo gruppo, non esitano affatto a considerare l'*inerzia* nel modo più palese come una *forza*.

Infatti, dopo di averla specificata al solito come la proprietà che hanno i corpi di conservare il loro stato di

Digitized by Google

quiete ecc., nell'illustrare il principio di Newton affermano che *per inerzia il corpo oppone una resistenza a cambiare il suo moto rettilineo; e questa resistenza detta forza centrifuga è una forza uguale ed opposta alla centripeta.*

Sarebbe possibile qui concludere che per questi autori l'*inerzia* e la forza *centrifuga* non siano la stessa cosa, e quindi l'inerzia non sia una forza uguale ed opposta alla centripeta?

Ma v'ha chi afferma essere l'inerzia una forza effettiva ancor più esplicitamente. " *... nel moto circolare uniforme di una massa, alla accelerazione centripeta* (probabilmente voleva dire forza centripeta) *la massa del corpo oppone la corrispondente reazione di inerzia, che è uguale ed opposta alla forza acceleratrice. Asserzione indubbiamente esatta, perchè l'inerzia è l'opposizione che manifesta la materiaal cangiamentode l suo stato* „.

Che del resto non vi sia equivoco sulla considerazione che l'autore intende fare della *inerzia* proprio come forza effettiva, lo si deduce poi anche dal seguito; ed infatti in seguito viene anche descritto un apparecchio per la dimostrazione sperimentale e misura della forza d'inerzia nel moto rettilineo.

Questa ultima concezione è pertanto diversa da quelle sopra ricordate. Maggior diversità poi appare ancora in qualche autore rispetto ad altri concetti conseguenti; ad esempio si afferma " *Che essendo la forza sollecitante e la reazione di inerzia uguali ed opposte e perciò equilibrantesi, ed essendo pur tuttavia il mobile sollecitato in moto uniformemente accelerato, il cosidetto equilibrio dinamico si verifica precisamente quando il mobile va di moto uniformemente accelerato* „. È superfluo che ricordi come invece si consideri un corpo in equilibrio dinamico quando esso pur essendo sollecitato da forze, procede di moto Uniforme e Rettilineo, per il fatto che le forze sollecitanti hanno risultante nulla, ossia si fanno equilibrio.

4) Mi pare che tuttociò sarebbe già bastante per convenire sulla opportunità di una chiarificazione sul significato da attribuire a questa parola *inerzia*.

Ma altri autori ancora, possono formare un altro gruppo. Essi infatti identificano, o lasciano pensare che si possa identificare l'*inerzia* colla *massa*.

E così alcuni dopo di avere ricordato come corpi diversi per natura e per dimensioni, sollecitati da una stessa forza acquistano moto uniformemente accelerato e con accelerazione diversa, scrivono che *ciò si esprime dicendo che esse presentano inerzia diversa. Quindi hanno massa diversa.*

Ed altri " *La massa distingue il diverso comportamento dei corpi col mutare del moto.* Poi in seguito, parlando di due sfere l'una più pigra dell'altra a cambiare il moto sotto l'impulso di una forza, si aggiunge *che quella più pigra possiede una maggiore inerzia dell'altra.*

Ancora parlando del terzo principio, si dice: l'*accelerazione è proporzionale direttamente alla forza e inversamente alla inerzia o alla massa del corpo* ».

E con ciò dunque il lettore non può a meno di non identificare l'*inerzia* colla *massa*, ciò che non era menomamente indicato nei concetti riportati nei precedenti gruppi.

Altri gruppi ancora potrebbero farsi riunendo quegli autori, che associano insieme nei vari modi i concetti suesposti.

Ma anche fermandomi a questo

Digitized by Google

punto ritengo di avere già ormai dimostrata la necessità di una discussione sull'argomento. E dati gli scopi di queste *Note didattiche*, oso confidare che la discussione riuscirà assai proficua e del più alto interesse.

ERNESTA GOLDSTAUF.

Una dimostrazione del Teorema di Pitagora.

Teorema. — Nei triangoli rettangoli il quadrato sulla ipotenusa è uguale alla somma del quadrato sui cateti. (EUCLIDE I: - Prop. 47).

Fra i cateti del triangolo rettangolo ABC deve sussistere una ed una sola delle relazioni

$$CA = AB, \qquad CA \neq AB$$

Sussistendo la prima delle dette relazioni, il triangolo rettangolo è isoscele. Allora sull'ipotenusa CB costruiamo il quadrato CBMN dalla parte di A. (*). Prolunghiamo BA dalla parte di A, sino in N, e il segmento NA risulterà uguale ad AB; da N conduciamo la parallela a CA, e da C la parallela ad AN, che si incontreranno in P. Abbiamo così costruito il quadrato CANP di lato CA e condotta da B la parallela a CA, questa incontrerà la PC in S, avremo così costruito il quadrato SBAC di lato AB.

Dalla figura è intuitivamente evidente la equivalenza fra il rettangolo PNBS, somma dei due quadrati CANP. ed SBAC costruiti sui cateti, con il quadrato CBMN costruito sulla ipotenusa.

Una dimostrazione analoga si riconda in P, definendo CASP, che è il quadrato di CA (è parallelogrammo perchè ha i lati paralleli, è rettangolo perchè ha un angolo retto, è quadrato perchè dall'eguaglianza di NCP e CAB risulta l'eguaglianza dei due lati CA e PC).

(*) Il cortese lettore è pregato di costruirsi le figure durante la lettura.

Da M, infine conduciamo il segmento MH parallelo a PS, CA, QB, sino ad incontrare AS in H.

Per la dimostrazione del teorema basta includere in CBMN i due quadrati de' cateti. Infatti:
CALN è comune a CBMN ed a CASB, scontra in vari testi di geometria e *Arturo Schopenhauer* la mostra nel suo libro «*Il mondo come volontà e come rappresentazione*» come un modello di dimostrazione intuitiva.

Passiamo al caso generale

$$CA \neq BA.$$

Sia CA il cateto maggiore del triangolo rettangolo ABC.

Costruiamo i quadrati
CBMN di lato CB dalla parte di A; ABQT di lato AB dalla parte di C; prolunghiamo BA dalla parte di A ad incontrare NM in L, da N conduciamo la parallela a CA e da C la parallela a BA; la prima incontrerà il prolungamento di BA in S e la se-FBAT è comune a CBMN e ad ABQT, (dove F è l'intersezione di CB e TQ)

$$MHB = NPC$$
$$FQB = LHM$$
$$CTF = NSL$$

Abbiamo così dimostrato che le parti del quadrato CBMN della ipotenusa sono eguali a tutte le parti in cui si sono scomposti i quadrati dei cateti.

Roma, marzo 1927.

GUIDO SINOPOLI

Direzione e Amministrazione: **Istituto G. Ferraris** — Roma
Direttore responsabile: Prof. Enrico Gradara

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore - *Città di Castello* - 1927.

Digitized by Google

ARCHIMEDE

IL METODO

Quest'opera di *Archimede*, l'ultima scoperta, tradotta per la prima volta in italiano è corredata di numerose note esplicative, critiche, storiche e di citazioni, da una prefazione e da una tavola delle figure.

Indice della prefazione. 1° Ragione della traduzione. 2° Le opere di Archimede. 3° La scoperta del *Metodo*. 4° Il contenuto del *Metodo*. 5° Le traduzioni del *Metodo*.

Indice del Metodo: Introduzione. Lemmi. 1° Area del segmento di parabola. 2° Volume della sfera. 3° Volume dell'ellissoide. 4° Volume del segmento di paraboloide. 5° Centro di gravità del segmento di paraboloide. 6° Centro di gravità dell'emisfero. 7° Volume del segmento di sfera. 8° Volume del segmento di ellissoide. 9° Centro di gravità del segmento di sfera. 10° Centro di gravità del segmento di ellissoide. 11° Volume e centro di gravità del segmento di iperboloide. 12° Volume di un particolare segmento di cilindro P. I 13° *Id. id.* P. II. 14° *Id. id.* Dimostrazione con la parabola ausiliaria 15° *Id. id.* Dimostrazione geometrica.

Inviare cartolina vaglia di **L. 6** al **Prof. ENRICO GRADARA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris***, Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore

(Perugia) CITTA' DI CASTELLO (Perugia)

Esecuzione accurata ed elegante di qualsiasi genere di lavoro tipografico di lusso e commerciale: Libri - Opuscoli - Riviste - Giornali - Cartoline illustrate ed illustrazioni - Carte intestate - Buste - Biglietti - Modelli - Registri - Libretti Colonici - Partecipazioni di lutto e di nozze, ecc.

Avendo l'azienda carattere di Scuola per orfani e non scopo di lucro, è in grado di praticare prezzi modicissimi.

Digitized by Google

COLLABORATORI

E. ALLARA — A. ANTONELLI — G. APRILE — E. ARTOM — P. BARTOLI — P. BENEDETTI — G. BEMPORAD — A. BERNINI — A. BARTORELLI — F. BERIO — U. BINI — U. CASSINA — P. CATTANEO — G. V. CAVALLARO — E. CAVALLI — F. CHIAPPETTI — C. CIAMBERLINI — A. CIANFLONE — U. CRUDELI — A. COLA — S. COMPOSTO — L. CONTE — M. DEL GIUDICE — L. DELLA CASA — G. DELITALA — G. DE STEFANO — L. DI LAZZARO — S. ENA — G. FAVARO — M. FRAILIK — O. FRANCESCHI — M. FRITZSCHE — A. FONTANA — R. GALLONI — A. GANDINI — A. GASPARINI — F. GIUDICE — V. GRADARA ENA — U. GRASSI — G. LACCA — P. LANZAVECCHIA — R. LEONARDI — M. LEONCINI — V. MARSEGUERRA — E. MACCAFERRI — A. MARENGONI — M. MIGLIO — G. MIRTO — M. MIRTO — U. MONETTI — A. NATUCCI — A. NEPPI — A. PADOA — F. PALATINI — P. PANICHI — G. PEANO — N. PELLEGRINI — P. PENNA — R. PISCEL — G. QUAGLIA — N. RICCI CARTOM — F. RIMONDINI — G. SABINI — U. SALINI — A. SALMOIRAGHI — A. SCALA — P. SCATIZZI — A. SCHOR — SCHOR C. — F. SIBIRANI — N. SIRACUSANO — G. SPINA — D. SPANO — L. TENCA — S. TOSCANO — G. VICI — E. VIGLEZIO — L. VINGIANI — G. VITALI.

Rassegna di Matematica e Fisica

Annate: I (1920-21) — II (1921-22): — III (1922-23): — IV (1923-24) — V (1924-1925): — VI (1926).

Ciascun volume con frontespizio e indici . . . . . L. **30**

Un fascicolo separato . . . . . L. **4**

Agli abbonati, librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento.

Inviare cartolina vaglia al **Prof. MARCELLO PUMA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris,*** Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Digitized by Google

324a
11.676

Anno VII - N. 11-12 Novembre-Dicembre 1927

RASSEGNA

DI MATEMATICA E FISICA

Periodico mensile dell'Istituto G. Ferraris

DIRETTO

DA

E. GRADARA - G. PUMA - M. PUMA

BIBLIOTECA NAZIONALE V.E. ROMA
24 GEN 1928
RIVISTA

SOMMARIO

ARIODANTE FONTANA: Alessandro Volta.

CARLO SCHOR: Il concetto e la misura dell'energia e della potenza elettrica nelle esperienze e nel pensiero di Alessandro Volta.

MARIA MARCALETTI: L'esposizione Voltiana - Il tempio Voltiano - L'edizione nazionale delle opere di Alessandro Volta.

ABBONAMENTO ANNUO:
ITALIA. . . L. 20 — ESTERO. . . L. 25
Inviare l'importo all'Amministrazione
Piazza di Spagna, 35 ROMA (6)

ROMA

Direzione e Amministrazione:
Istituto G. Ferraris
Piazza di Spagna, 35

Digitized by Google

ANNO VIII

(1928)

DELLA

Rassegna di Matematica e Fisica

Abbonamento all'anno VII: Italia L. 20 - Estero L. 25

Un numero separato dell'anno VII: Italia L. 3 - Estero L. 3,50

ai librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento

inviare cartolina vaglia al

Prof. MARCELLO PUMA

Istituto G. Ferraris - Piazza di Spagna, 35 - Roma (6)

---

*A coloro che ci invieranno in una sola volta l'importo di 5 nuovi abbonamenti si concederà l'***abbonamento gratuito.**

La corrispondenza con la Rassegna deve essere inviata all'indirizzo:

Direzione della Rassegna - Istituto G. Ferraris

Piazza di Spagna 35 - Roma (6)

N.B. *Per avere pronta risposta occorre inviarne l'affrancatura in francobolli.*

VITA NUOVA

ABBONAMENTO ANNUO L. 2

Dirigere vaglia

ISTITUTO " G. FERRARIS „

Piazza di Spagna 35 - ROMA (6)

Digitized by Google

ALESSANDRO VOLTA

1827-1927.

Digitized by Google

ALESSANDRO VOLTA

DI

ARIODANTE FONTANA (*)·

Nell'anno 548 a. C., durante lo svolgimento dei giochi olimpici, moriva improvvisamente vecchissimo il filosofo *Talete* da Mileto, ammirato e celebrato per la vastissima cultura matema-

(*) Con vivissimo dolore la *Rassegna* deve dare ai suoi lettori la triste notizia dell'improvviso decesso (3 ottobre 1927) del collaboratore ed associato **Ariodante Fontana,** da Macerata, Ordinario di Matematica e Fisica nel Regio Istituto tecnico di Viterbo. Il Fontana, laureatosi nel 1893 in Scienze Fisiche nella R. Università di Roma, presentando due notevoli e dotti lavori sui bronzi d'alluminio e sullo spettro dei vapori d'ipoazotite, rimase assistente del Blaserna per quattro anni. Di questo periodo sono alcune interessanti e pregevoli memorie di varii argomenti di Fisica, pubblicate negli Atti dell'Accademia dei Lincei. Nel 1897 venne nominato professore nel R. Istituto tecnico di Viterbo, ove impartì con continuità l'insegnamento, prima della sola fisica, e poi quello di matematica e fisica sino al giorno precedente alla sua morte, tranne nel periodo dell'ultima guerra, per la quale fu richiamato alle armi quale Ufficiale di Artiglieria. E così egli diede tutta la sua attività alla Scuola, dedicandosi non solo all'insegnamento, in modo così speciale da lasciare un grande rimpianto tra gli attuali e gli antichi suoi allievi, ma anche a tutto ciò che potè servire d'incremento e di lustro alla Scuola e di giovamento ai Colleghi; per tali sue doti, Superiori e Colleghi furono dolorosamente colpiti nell'affetto e nella stima dalla sua scomparsa.

Anche fuori della scuola prodigò la sua particolare attività dirigendo la locale e in seguito la provinciale Società Nazionale di Tiro a Segno, presiedendo sin dalla loro fondazione i Corsi d'Istruzione premilitare, il Corpo Nazionale dei Volontari Ciclisti e Automobilisti e la Società Nazionale degli Ufficiali in Congedo. Decorato al Merito di Guerra, Cavaliere della Corona d'Italia, attraverso molti Comitati e Commissioni, prese parte a parecchie opere di pubblico interesse per la città di Viterbo.

La *Rassegna*, per onorarne la memoria ha creduto di far cosa gradita ai lettori pubblicando la conferenza sul Volta, ch'Egli avrebbe dovuto tenere agli allievi del suo Istituto nella prima decade del passato ottobre. Nel pubblicarla si sono omesse la fine e alcune parti, che erano indirizzate particolarmente agli studenti della sua scuola.

La *Direzione della Rassegna* porge le sue condoglianze alla Famiglia ed alla Scuola.

Digitized by Google

tica e astronomica; aveva egli per primo segnalato la proprietà dell'ambra di attrarre, strofinata, pezzetti di paglia, di pergamena, ed altri corpi leggeri. Questa proprietà, che dal nome greco dell'ambra fu denominata *elettricità*, non ebbe per secoli cultori se non a scopo di curiosità. Cosicchè Talete può ben dirsi lo scopritore dell'elettricità.

Dopo 2000 anni questo fenomeno doveva esser preso a studiare per guidare l'umana civiltà al presente stato, che ci permette di guardare con compatimento il passato e con fiducia l'avvenire.

Gli antichi non pensarono mai di paragonare i fenomeni presentati dall'ambra con quelli notissimi dell'elettricità atmosferica, quale il fulmine, il fuoco di S. Elmo ed altri, tanto parevano di differente natura.

E occorre giungere all'anno 1590 perchè l'inglese *Gilbert*, medico della regina Elisabetta, scopra la stessa proprietà dell'ambra in altri corpi, come il vetro e lo zolfo.

Ma già nel 1670 *Ottone di Guerike*, elettore di Magdeburgo, otteneva notevoli quantità di elettricità, costruendo la prima macchina a strofinio; e segnalava anche diversi delicati fenomeni di attrazione e repulsione elettrica, sui quali gli scienziati a lui contemporanei o immediati successori vollero troppo presto fare ipotesi sulla natura dell'elettricità.

La prima ipotesi di *Beniamino Franklin*, detta *unitaria*, ammetteva l'esistenza di una tenuissima materia elettrica, la quale imbevesse la materia comune. Una giusta distribuzione di materia elettrica tiene allo stato neutro la materia comune; invece l'eccesso o il difetto di quella dà ai corpi quegli stati elettrici, che si chiamano positivo e negativo, con le note conseguenze di attrazione e repulsione.

La seconda ipotesi, dovuta al *Symmer* e detta *dualistica*, ammetteva due sorta di elettricità, la positiva e la negativa, le quali con la loro presenza sulla materia comune determinano i due stati elettrici.

Intanto alla teoria si intrecciavano svariati e interessanti esperimenti, che davano luogo a notevoli scoperte. L'olandese *Musschembrook*, professore a Leyda, per ottenere un conduttore capace di raccogliere una grande quantità di elettricità, metteva in contatto la macchina elettrica con l'acqua contenuta in una bottiglia di vetro mediante un lungo chiodo infilato nel collo del

Digitized by Google

recipiente; e avendo inavvertitamente una volta, mentre teneva la bottiglia carica in mano, toccato il chiodo con l'altra, riceveva una tale scossa nelle braccia e nel petto, da dichiarare che non avrebbe ripetuto l'esperimento neppure se gli avessero donata la corona di Francia; così veniva scoperta la *bottiglia di Leyda* e il *condensatore* elettrico.

In quel tempo il francese abate *Nollet* sosteneva che il fulmine in mano della natura fosse paragonabile all'elettricità in mano dell'uomo. Ma spettava all'americano *Franklin* il merito di aver condotto lo studio dell'elettricità atmosferica fino alla scoperta del parafulmine, nel 1760, col quale dimostrava l'identità delle due elettricità, quella del fulmine e quella della macchina elettrostatica.

In mezzo a un moltiplicarsi incessante di esperienze, in mezzo a un enorme fervore, si potrebbe dir quasi fanatismo, per l'elettricità, che però era ben lungi dall'affermarsi come scienza, nasceva a Como, il 18 febbraio 1745, **Alessandro Volta** da Filippo e Maddalena Inzaghi.

Rimasto orfano di padre appena adolescente fu dallo zio, canonico del duomo di Como, indirizzato agli studii nel collegio dei Gesuiti; e mentre questi volevano iniziarlo per la loro Compagnia e quegli per gli studi legali, il giovane faceva notevoli progressi negli studii filosofici e letterarii. Ma, sentendosi trascinato alle scienze di osservazione e sperimentali, si dava da solo allo studio della fisica, compensando con l'acutezza dell'ingegno e la sottigliezza dello spirito di osservazione e di critica alla mancanza dell'insegnamento scolastico, aiutato nei primi passi della fisica dall'amico *Giulio Cesare Gattoni*, canonico della Cattedrale di Como, incline a quest'ordine di studii e ben fornito di libri e di mezzi finanziarii. Ma il Volta, fin dall'età di 16 anni, ansioso di arricchire in ogni modo le sue cognizioni, si metteva in corrispondenza epistolare coi migliori fisici e chimici del suo tempo. Il suo voluminoso epistolario scientifico, che a noi è giunto, con questi dotti incomincia nel 1765 con una lettera, diretta al professore *Giacomo Beccaria*, dell'università di Torino, in cui si dimostrano già la larghezza e sicurezza di veduta del giovanissimo autore. Questa lettera è prova della chiarezza di esposizione, delle logiche e rigorose conclusioni tratte sempre da una minuziosa successione di esperimenti condotti nelle più diverse condizioni; per cui scrive in essa: « Mi sono appigliato

Digitized by Google

« al precetto da Essolei suggeritomi di tener dietro in ogni mia « ricerca all'esperienza, anzichè abbandonarmi al capriccio delle « mie idee ed ai miei pensamenti ». Questa è la professione del metodo di ricerca scientifico a cui il Volta si attenne per tutta la vita.

Primi frutti di tale metodo di ricerca e di critica applicato ai fenomeni presentati dalla bottiglia di Leyda fu l'invenzione dell'*elettroscopio condensatore*, atto all'investigazione di quantità minime di elettricità e dell'*elettroforo*, la prima delle macchine elettriche dette *ad induzione*, per distinguerle dalle precedenti a *strofinio*. Non so trattenermi dal riportare la descrizione sommaria di questo apparecchio scritta dallo stesso Volta in una lettera diretta al cremonese *P.dre Campi*. « Ho costruito un pic- « colo apparecchio semplicissimo che sta tutto rinchiuso in una « scatola portatile comodamente in tasca. In questa ho stampata, « dirò così, una elettricità che non si estingue più mai. Ve l'ho « impressa senza corredo di macchine, e sì ne ho i segni d'ogni « maniera senza dispendio finchè mi giova averne; e segni af- « fatto vivaci, bastevoli ad elettrizzare fortemente un ben capace « conduttore, un uomo isolato, caricare una boccia per la scos- « sa, ecc. Insomma quanto si ottiene da una competente mac- « china io l'ottengo dal mio apparecchio senza ruota, senza giro, « senza stropicciamento di sorta, a riserva del primo impiegatovi « una volta sola, quando dapprima (ed ha già più di un mese) « vi stampai l'elettricità ». Queste righe risentono della loro veneranda età di 152 anni per la forma letteraria, ma mi sembrano un bell'esempio di chiara e viva descrizione scientifica!

E, già che siamo in citazioni, voglio riportare anche le sue parole dirette al *P.dre Barletti* con le quali nel 1777, un ventennio prima degli stessi suoi studii sulla corrente della pila, espone il concetto precursore della trasmissione elettrica a distanza: « Quante belle idee di esperienze sorprendenti mi van ribollendo « in testa eseguibili con questo strattagemma di mandare la « scintilla elettrica a fare lo sparo della pistola a qualsivoglia « distanza e in qualsivoglia direzione e positura! Invece del co- « lombino che va ad appiccar l'incendio alla macchina di fuochi « artificiali, io vi manderò da qualunque sito, anche non diretto, « la scintilla elettrica, che col mezzo della pistola, aggiustata al « sito della pianta artificiale vi metterà fuoco. Sentite, io non « so a quante miglia un fil di ferro tirato sul suolo dei campi

Digitized by Google

« e delle strade... condurrebbe... la scintilla commovente... « Ma se il filo di ferro fosse sostenuto alto da terra da pali di « legno qua e là piantati, p. es. da Como fino a Milano, e quivi « (interrotto solamente dalla mia pistola) ... finisse col pescare « nel canale del Naviglio... non credo impossibile di fare lo « sparo della pistola a Milano con una boccia di Leyda da me « scaricata a Como ». Così il Volta intravedeva con queste parole ciò che fu realizzato 55 anni dopo dall'americano *Morse*.

È che il metodo di ricerca del Volta non poteva non assottigliare la sua intelligenza fino al punto di dotarlo, dirò quasi, di uno spirito profetico in fatto di applicazioni elettriche. E vi è testimonianza sicura ch'Egli persino predicesse la telefonia elettrica, perchè in un'epoca imprecisata tra il 1800 e il 1825 divulgando la sua scienza tra i contadini di Lazzate, fu sentito ripetere più volte: « verrà un giorno in cui, basandosi sulle mie scoperte, si potrà parlare con Milano ».

Da quattro anni il Volta era professore di Fisica nel ginnasio di Como, quando dal conte di Firmian, governatore austriaco della Lombardia, veniva chiamato nel 1778 alla stessa cattedra nella millenaria università di Pavia.

Ormai l'attività del grande fisico poteva svilupparsi ampiamente nella scuola e fuori, in Italia e all'estero. Amantissimo di viaggiare, sia per accrescere la propria cultura sia per provvedere il suo Gabinetto dell'Università di nuovi strumenti da esperienza, portava in lunghi viaggi il nome d'Italia in gran parte d'Europa. Visitava dapprima le regioni confinanti con la natia terra, ma allargava ben presto le sue mete; e così compiva il primo viaggio nel 1777, visitando la Svizzera, l'Alsazia e la Savoia. Nel 1780 faceva un viaggio in Toscana, che fruttava, la memoria sui terreni a fontane ardenti in generale e su quelli di Pietramala, nel Fiorentino, in particolare. Si occupava ancora di geologia nel 1781, recandosi ad osservare i fuochi spontanei presso le rovine di Velleia in Provincia di Piacenza.

Il più lungo viaggio, durato tredici mesi, veniva da lui intrapreso nel settembre del 1781: da Torino si recava a Lione, a Ginevra, a Berna fino a Colonia; di qui passava ad Asquigrana, Lovanio, Bruxelles, Anversa, Leida, Rotterdam e in altre città del Belgio e dell'Olanda; e, ritornato a Bruxelles, prendeva la via di Parigi ove sostava durante quattro mesi. Nella primavera del 1782 andava a Londra e di qui in Oxford, Birmingham,

Digitized by Google

Manchester, Liverpool e in altre città inglesi. Finalmente per Ostenda, Bruxelles, Metz, Marsiglia ritornava in patria.

Un altro lungo viaggio, di circa 5 mesi, faceva nel 1784 attraverso l'Austria, la Boemia, la Sassonia, il Brunswich e la Prussia.

Di nuovo andava nella Svizzera nel settembre del 1787 e finalmente nel 1801 si tratteneva a Parigi, chiamatovi da Napoleone.

In tutti questi viaggi il Volta aveva la fortuna di trattare coi grandi scienziati che onoravano l'epoca sua in ogni ramo del sapere; e dovunque osservava, sperimentava, discuteva in fecondo scambio di idee con quei grandi; *Franklin*, *Charles*, *Berthollet*, *Buffon*, *Laplace*, *Lavoisier*, *Watt*, *Priestley*, *De Saussure*, *Pictet*, *Voltaire*, per citarne soltanto alcuni. L'amicizia e la corrispondenza che tenne con uomini siffatti cancella la stolta accusa ch'Egli nen avesse esteso il suo sapere fuori del campo dell'elettricità. E bisogna pur ritenere che dal suo sguardo, dal suo portamento, dai suoi discorsi trapelasse il genio, se così insigni scienziati lo accoglievano con deferenza e onore, anche quando non aveva ancora raggiunta la notorietà dell'età matura.

Il Volta pur avendo piena coscienza del proprio valore, così da lasciar scritto « io ho il genio dell'elettricità », era sinceramente modesto e urbano; anche quando era giunto nella pienezza della sua gloria, prodigava consigli ed elogi all'opera altrui, pur traendone qualche intima amarezza. Così quando il *Nicholson* a Londra, servendosi della pila voltiana, decomponeva l'acqua nei suoi elementi, attraversando il lavoro del Volta, che già aveva fatto esperimenti conclusivi in proposito, il fisico comasco non si rammaricava della scoperta rapitagli, ma solo si scusava quasi di non esser Egli giunto prima per amore di quella sicurezza scientifica che traeva dall'applicazione del galileiano *provando e riprovando.*

Ma se era modestissimo, era però altrettanto fermo nell'affermaro la priorità delle sue scoperte. Per il primo, e avanti del 1781, aveva dimostrato con la sua pistola elettrica che l'idrogeno, bruciato con metà del suo volume di ossigeno, scompariva lasciando acqua senz'altri residui e, alludendo al *Lavoisier* che si occupava dello stesso argomento scriveva: « Egli non fece che « verificare o completare la mia scoperta: riguardo agli appa« recchi non fece che perfezionare la mia *lampada ad aria* o

Digitized by Google

« combinare questa al mio *eudiometro* ». L'autore accenna qui a due sue invenzioni: l'eudiometro e una lampada a gas idrogeno, che si accendeva col suo elettroforo.

Intanto il medico bolognese *Luigi Galvani*, dotto professore di anatomia all'università di Bologna, verso il 1780 studiava la irritabilità degli animali a sangue freddo, e a tale scopo operava largamente sulle rane, scoprendo dapprima che le membra di una rana uccisa da poco tempo si agitavano se percorse da una scarica elettrica o soltanto immerse nell'atmosfera elettrica, come dicevasi allora, cioè sottoposte all'influenza della macchina elettrostatica. E appunto per preparare le rane a tali esperienze faceva il classico esperimento che porta il suo nome, credendo di aver scoperta così una nuova sorte di elettricità, di origine animale, la quale, prodotta continuamente dai tessuti si sarebbe condensata in una specie di bottiglia di Leyda, rappresentata dai nervi e dai muscoli. Il Volta in un primo momento aderiva alle idee del Galvani e con l'universale consenso degli studiosi si parlò di corrente galvanica; ma in un secondo tempo il Volta, fedele al suo rigoroso metodo sperimentale, moltiplicando e variando in moltissimi modi l'esperimento del Galvani, si accorgeva come questo non avvenisse, se il contatto fra nervi e muscoli si faceva con un solo metallo anzichè con una catena di due e in breve tempo ne arguiva che la sede del fenomeno elettrico non fosse nella rana, ma nel contatto tra i due metalli e che la rana facesse soltanto da segnalatore del passaggio della corrente. E poichè il Galvani non cedeva e provava con altre esperienze che il fenomeno si poteva avere talvolta con un solo o anche senza metallo, il Volta con molte nuove e decisive esperienze assicurava che se i tessuti della rana erano asciutti, la prova non riusciva mai. E allora Egli tentava l'esperimento su se stesso, rivelando una così grande raffinatezza nell'appurare le sensazioni da poter classificare i fenomeni percepiti, impiegando il solo senso del gusto; posava sulla punta della lingua una laminetta di stagnola ed appoggiava sulla parte media di essa un cucchiaio d'argento, non avvertendo nulla fino a che i metalli stavano tra loro distaccati, ma sentendo un sapore acido, quando venivano in contatto, che diventava di momento in momento sempre più intenso, cioè la medesima sensazione di quando esponeva la lingua nell'effluvio del conduttore positivo della macchina elettrica. Non esitava quindi a formulare la teoria del

Digitized by Google

contatto e a ritenere che l'argento si caricasse positivamente a contatto con lo stagno: « Sono i metalli, così Egli scrive, non « solo conduttori perfetti, ma motori dell'elettricità: non solo ri- « stabiliscono cioè lo sbilancio, ma producono essi stessi e pro- « muovono un tal quale sbilancio di estrarre di questo fluido, o « introdurre dove pur trovasi in giusta dose ripartito, non altri- « menti che avviene con lo stropicciamento degli idioelettrici, e « siccome tal metallo prevale sopra tale altro nel tirare il fluido « o nel rilasciarlo, così avviene che due armature di diverso me- « tallo a contatto lo mettono in perpetuo giro. Ella è questa una « virtù dei metalli da nessuno ancora sospettata, che le mie espe- « rienze mi hanno condotto a scoprire; e tengo debba stabilirsi « per legge generale che il semplice contatto di conduttori di « diversa qualità basti a turbare l'equilibrio del fluido elettrico « e a smuoverlo senza che siavi bisogno di stropicciamento al- « cuno ».

La piccolezza del fenomeno, che si rivela appena con gli accorgimenti suggeriti dallo scopritore stesso, induceva il Volta ad ideare un insieme di parecchie coppie di metalli o elementi per sommarne gli effetti ed ottenerne degli effetti vistosi; e così costruiva ciò che dalla forma chiamava *pila elettrica.*

Pochi inventori hanno avuto, come il Volta, la meritata fortuna di veder subito accolta la propria scoperta col generale entusiasmo e sentire il proprio nome acclamato e onorato da tutti. Basta rileggere la bella descrizione della Pila che il fisico francese *Arago* faceva nell'elogio recitato, alla morte del Volta, davanti all'Accademia di Francia: « Che cosa potrà risultare da « questa catasta di materiali? Questa massa apparentemente « inerte, questa bizzarra unione di metalli diversi e di panno « bagnato, disposti a strati alternati è, nella singolarità dei suoi « effetti, il più meraviglioso strumento fra quanti furono inven- « tati dagli uomini, senza eccettuare il telescopio e la macchina « a vapore. Tenendo in mano uno dei fili metallici che termi- « nano la pila non si prova alcuna sensazione speciale, ma ap- « pena s'impugna anche l'altro si prova una violenta commozione. « È lo stesso fenomeno che fu riscontrato nel 1746 colla bottiglia « di Leyda, ma questa serve una volta sola, e dopo ogni scossa « è mestieri di ricaricarla; la pila invece si presta ad un numero « indefinito di commozioni successive e si può paragonare ad « una bottiglia di Leyda che ad ogni scarica riacquisti natural-

Digitized by Google

« mente la sua forza ». Basta osservare che l'atto di nascita della pila è costituito dalla lettera che il Volta scrisse il 20 marzo 1800 al presidente della Società Reale di Londra, descrivendola in ogni particolare e che già nell'inverno del 1801-2 il Volta era chiamato da Napoleone a Parigi e in tre storiche sedute dell'Accademia delle Scienze esponeva la sua scoperta dinnanzi ai membri della classe scientifica, avendo anche tra gli uditori il Primo Console. E il 10 novembre poteva scrivere alla moglie: « Finito ch'ebbi di leggere, prese la parola Bonaparte, ed esal- « tando le mie scoperte e colmandomi di elogi propose all'Isti- « tuto di decretarmi una medaglia d'oro e d'invitarmi a voler « ancora continuare con alcuni di loro più addetti alla fisica e « alla chimica le sperienze con farle in grande e variarle a qua- « lunque spesa. In mezzo a tante cose che devon certo farmi « piacere, e che sono fin troppo lusinghiere, io non m'invanisco « a segno di credermi di più di quel che sono, ed alla vita agi- « tata da una vana (!) gloria, preferisco la tranquillità e la dol- « cezza della vita domestica. Quindi è che sospiro di restituirmi « a casa, per abbracciare i cari figlioletti e tutti voi. Ma temo « che non sarà così presto. Come disimpegnarmi dalla specie di « obbligo che m'impone la proposizione di Bonaparte d'invitarmi « l'Istituto a continuare qui le sperienze? »

Con sollecitudine rara l'Istituto, spronato dalla volontà del Bonaparte, il 2 dicembre già riferiva sulle scoperte del Volta ed approvava le proposte del Primo Console di conferirgli una medaglia d'oro e 6000 franchi per le spese di viaggio. Napoleone poi gli dimostrava ancora la sua ammirazione insignendolo degli ordini cavallereschi della Corona ferrea e della Legione d'onore, nominandolo Conte, membro della Consulta italiana e Senatore del Regno d'Italia. Nel 1803 fu ammesso in qualità di Socio straniero in seno all'Accademia francese.

Quasi sessantenne nel 1804 il Volta chiedendo il collocamento a riposo dell'insegnamento universitario; ma Napoleone rifiutava, si dice, con queste parole: « Non saprei accondiscen- « dere al ritiro del Volta: se le sue funzioni di Professore lo « stancano, le riduca: faccia pure una sola lezione all'anno, ma « l'Università di Pavia sarebbe ferita al cuore il giorno che io « permettessi che un uomo così illustre sparisse dall'elenco dei « suoi membri. Del resto un buon generale deve saper morire « sulla breccia ». Il Volta cedeva al volere di Napoleone, tenendo

Digitized by Google

la cattedra fino agli ultimi anni di vita, in tutto circa un quarantennio.

Il nostro grande fisico fu consolato in vita dalla larga fama raggiunta dal suo nome, ma fu addolorato da tentativi di diminuzione, che fortunatamente non raggiunsero lo scopo. Uno sopra tutti gli altri lo addolorò. Nel soggiorno del 1782 a Parigi aveva lavorato col Lavoisier e col Laplace per realizzare un'idea sorta a lui fino dal 1778: i tre scienziati, sperimentando insieme, ottenevano non dubbi segni di elettricità facendo evaporare l'acqua in un recipiente metallico. Più tardi i due francesi descrivendo in una memoria l'esperimento scrivevano che il Volta assisteva e dava a loro alcuni consigli, durante i lavori; Arago e Biot nei loro scritti fingevano di ignorare la parte del Volta nella scoperta del fenomeno. Il Volta rivendicava in varie sue lettere la parte preminente che aveva avuta in questa vicenda; ma passato il sanguinoso periodo della rivoluzione, il Lavoisier non esisteva più, giustiziato nel periodo del terrore, e il Laplace carico degli onori dell'Impero e della Restaurazione, rifuggiva di ricordare le antiche e pericolose collaborazioni, e taceva per sempre.

Anche dopo la morte qualcuno volle diminuirgli la gloria mettendo avanti la stolta accusa dell'ignoranza del Volta nelle matematiche. Certamente egli non ebbe abito matematico formale, ma non v'è fisico che abbia condotti i suoi esperimenti e deduzioni con tanto rigore matematico quanto ne fu usato da lui; quando la matematica poi intervenne per collegare, verificare, misurare i risultati delle nuove scoperte intorno all'elettricità, constatò l'esattezza dei ragionamenti voltiani. Altri più stoltamente ancora lo accusarono di limitatezza del campo del suo sapere nelle scienze sperimentali, del silenzio scientifico dopo la scoperta della pila, quasi fosse esaurito o temesse di parer tale pubblicando lavori di minor valore, di essere stato inurbano e non giusto giudice con gli altri scienziati; ma queste furono piccole calunnie, che oggi sono totalmente cancellate, poichè Egli si occupò di altri rami della fisica e della chimica con notevoli risultati, quando non era troppo preso dai suoi studi elettrici prediletti, e non sdegnò neppure di rivolgere la sua mente e la sua opera agli interessi agricoli e industriali del suo paese; perchè la sua delicatezza e la dolcezza del suo animo non gli avrebbero permesso di trattare men che cortesemente i suoi

Digitized by Google

contradditori, come fece nella lunga contesa col Galvani e coi sostenitori di lui e non solo fu ammiratore e lodatore degli altrui lavori, ma fu largo di consigli e di suggerimenti con altri scienziati, tanto da farsi prevenire più volte nelle scoperte; perchè infine la sua attività scientifica durò fino al 1817, quand'era già più che settantenne, essendo di quest'ultimo periodo le sue due poderose e definitive memorie sull'identità del fluido elettrico e del fluido galvanico e ancora dopo il 1877 si hanno alcuni suoi lavori pregevoli d'indole diversa.

Il Volta, per quanto investito di cariche pubbliche, era alieno dalle competizioni politiche che per un quarto di secolo avevano lacerato la Lombardia, ed era vissuto quasi silenzioso tra le tumultuose e sanguinose vicende della rivoluzione francese. Però nel Congresso di Lione, in seno alla Consulta e al Senato d'Italia non aveva mancato di esprimere i suoi sentimenti di moderazione, di giustizia e di tolleranza. Egli fu affezionato al Bonaparte, rimanendo tale anche dopo la caduta, ma non lo seguì nel campo politico, che in quel che riguardava la formazione di un regno d'Italia, forse prevedendo il bene che doveva derivare al nostro paese da un'unione in un unico stato, fino a tirarsi addosso l'ira della folla, la quale rifiutava la candidatura di Eugenio Beauharmais, noto sprezzatore degli Italiani.

Fu di profondo e sincero sentimento religioso, il quale manifestò e sostenne anche nei tempi rivoluzionari in cui era pericoloso il palesarlo e di moda il nasconderlo.

Nel 1823 era colpito da lieve insulto apoplettico, che però non gl'impedì di continuare a coltivare i suoi studii prediletti; ma gli acciacchi della vecchiaia gli avevano diminuito la sua attività scientifica; la vista e l'udito gli si andavano sempre più affievolendo; e il 5 marzo 1827 spirava serenamente in Como nella grave età di 82 anni.

Veniva sepolto, a poca distanza da Como, nel modesto cimitero di Camnago, villaggio a lui dilettissimo. E il mausoleo, che racchiude la sua spoglia, veniva dichiarato da poco, nel 1925, monumento nazionale e circondato da tangibili segni di omaggio di tutti i popoli civili.

Gli elettricisti di tutto il mondo, nel congresso internazionale di Chicago, hanno nel 1893, onorato ufficialmente il Volta denominando col suo nome l'unità di forza elettromotrice...

Pavia era depositaria di numerosi strumenti costruiti

Digitized by Google

e adoperati dal Volta o da lui apparecchiati per nuovi esperimenti; ma disgraziatamente un incendio li distrusse quasi tutti, quando erano esposti nel 1899 a Como per festeggiare il centenario della pila. Sui pochi apparecchi superstiti che vennero quest'anno esposti nuovamente in Como, all'esposizione che commemora la sua morte, si è concentrata la riconoscente ammirazione di coloro che meditano sulle conseguenze realizzate dalla scoperta dell'immortale italiano.

Invero, se una sorte avversa avesse negato al Volta e all'umanità l'invenzione della pila, la nostra vita trascorrerebbe ben diversamente da quel che è. Il civile consorzio non mancherebbe di macchine a vapore, di ferrovie, di piroscafi, di motori a gas, di turbine idrauliche, ma l'uso di questi mirabili congegni sarebbe limitato dalla mancanza di quel fluido che fulmineamente trasmette il pensiero e la volontà umana: non s'avrebbero nè telegrafi nè telefoni elettrici a filo e senza filo; nè esisterebbero le arti minori della decorazione e della riproduzione galvanica. E poichè la Natura è avara dei suoi più nobili prodotti, è lecito credere che difficilmente sarebbe sorto in quest'ultimo secolo, senza la preparazione voltiana, chi avesse scoperto le macchine dinamo, gli alternatori, i trasformatori, i motori elettrici e per conseguenza non esisterebbe nulla di quanto deriva o ha attinenza col trasporto dell'energia. Noi ammireremmo ancora integre le belle cascate d'acqua in tutta la terra, ma non sarebbe utilizzata quasi l'enorme forza motrice di cui sono capaci; ignoreremmo quindi le piccole industrie alimentate dal domestico piccolo motore elettrico, ignoreremmo le tramvie, le ferrovie, la luce e la metallurgia elettriche; l'industria elettrochimica non esisterebbe e i campi sarebbero privi della quasi totalità delle sostanze fertilizzanti chimiche . . . . . .
. . . . . .
. . . . . .

Digitized by Google

Il concetto e la misura dell'energia e della potenza elettrica nelle esperienze e nel pensiero di Alessandro Volta

DI

CARLO SCHOR.

" E che può mai farsi di buono, se le cose non si riducono a gradi e a misure, in fisica particolarmente? Come si valuteranno le cause, se non si determina la qualità non solo, ma la quantità e l'intensione degli effetti? „

A. V.: Memoria prima sull'E. A.

Principi di carattere e validità universale, come quello della conservazione dell'energia, derivano da concezioni dei fenomeni naturali che si sono andate lentamente maturando attraverso le indagini, feconde di risultati, di numerosi scienziati; e se è grande il merito di chi seppe enunciare uno di tali principi, non può certo dirsi meno grande quello degli indagatori che — col potente contributo di meravigliose scoperte — prepararono le menti a bene intenderlo. Così la costanza della somma delle energie naturali, e già la somma stessa, per essere bene intese, premettono il possesso di un chiaro concetto e la conoscenza di una esatta misura della quantità « energia », per tutte le varie forme nelle quali essa si presenta in natura: non si accenna dunque ad un piccolo merito, ricordando che — nel campo dei fenomeni elettrici — lo sviluppo di questo concetto e la ricerca di questa misura sono dovute al sottile spirito di osservazione ed alla non comune finezza d'intuito di Alessandro Volta.

L'energia si rivela quale quantità, quando — nel confronto di più energie della stessa specie, ma di caratteri diversi — ci si sente indotti a stabilirne l'equivalenza attraverso l'eguaglianza dei loro effetti; e soltanto la ricerca degli elementi che la compongono e dell'influenza che questi esercitano sulla sua grandezza possono condurre alla sua misura. Ed è questa appunto la via che batteva Alessandro Volta, con la superba sicurezza dei Grandi, non appena la scoperta del Galvani lo aveva reso attento sulla sensibilità galvanoscopica della rana: perchè sol-

Digitized by Google

tanto nella scarica dell'energia appariscono i suoi effetti nella loro pienezza. Certamente non fa uso il Volta della parola « energia », introdotta, a quanto pare, per la prima volta da F. Joung nella meccanica in un'opera pubblicata quando il Volta aveva già compiuto le Sue ricerche; Egli la designa invece « quantità e forza dell'elettricità » (1) e considera quale suo equivalente fisiologico il valore o la grandezza della scossa da essa prodotta; e dalle Sue limpide considerazioni balzano i concetti di energia e di potenza elettrica con insuperabile chiarezza.

Le cariche delle bocce di Leyda rappresentano nelle Sue prime esperienze determinate quantità di energia elettrica, la rana il galvanoscopio attraverso il quale esse si scaricano. Già in queste prime esperienze Egli s'accorge che la causa delle contrazioni muscolari che si osservano nella scarica non è punto semplice; infatti la tensione può esser variata, purchè si varii nello stesso tempo, ed in maniera corrispondente, la capacità; così si ottengono le stesse commozioni leggere, ci si trova cioè di fronte alla stessa quantità di energia elettrica, scaricando la boccetta piccolissima di tre pollici quadrati di armatura alla tensione 2-3 gr. Micr. El. Ed aumentando la sensibilità del galvanoscopio col preparare la rana alla maniera del Galvani, producono gli stessi effetti tanto il conduttore di due piedi di lunghezza e mezzo pollice di diametro, caricato a 2-3 gr. Micr. El., quanto la boccetta di 12 pollici quadrati di armature a 16 gr. Micr. Cond. (2). La tensione può essere dunque rivolta a metà, purchè si quadruplichi la capacità; e riducendo la tensione a circa un settimo, la capacità deve essere aumentata nel rapporto di circa 48 : 1 (3).

A risultati ancor più precisi arriva il Volta — dopo la scoperta della Sua pila — impiegando elettrometri e galvanoscopi non meno sensibili di quelli dapprima usati e forse meglio « comparabili », caricando cioè diverse batterie di giare (di 100 pollici quadrati di armatura e dello spessore di $^1/_3$ di linea) con l'azione momentanea di pile di un numero variabile di coppie (di Cu e Zn, interpolate da bollettini di carta inzuppata di miele) al segno di darGli « la minima scossa sensibile ai due diti che compiono il circolo intinti nell'acqua di due vasi... Corrisponde... discretamente bene alle esperienze il calcolo, ponendo che un doppio numero di coppie metalliche della pila faccia dare la minima scossa a quattro volte minor numero di giare », e preci-

Digitized by Google

samente il numero di coppie necessario per giare 1, 2, 4, 8, 16 è di 28, 19.8, 15, 9.9, 7 (4).

Ma già molto prima di eseguire queste nuove accurate esperienze, che dovevano servir di conferma al concetto di energia elettrica che s'era andato formando nella Sua mente, Egli si rendeva chiaramente conto degli elementi che influivano sul valore o polso della scossa, ossia sulla grandezza dell'energia che scaricandosi la provocava. « Invero è sorprendente il vedere come e quanto venga scossa (la rana) da tali scariche non scintillanti debolissime di boccette anche piccole: e solo diminuisce un poco la meraviglia, riflettendo come la carica delle bocce di Leyda equivalga per quantità di fluido elettrico, in grazia della loro sì grande capacità, ad una carica dell'istesso grado di un semplice conduttore centinaia di volte più grande » (2); e nell'ulteriore esame « del valore delle scariche elettriche, sotto il doppio rapporto della loro intensità, o tensione elettrometrica, e della quantità di fluido che le forma » (5) arrivava ben presto alla conclusione che « il valore, o gravezza della scossa... è in ragione composta della tensione e della quantità del fluido elettrico » (5).

L'energia elettrica appariva dunque al Volta composta da due fattori, uno d'intensità ed uno di quantità; ma i Suoi strumenti erano tali, da permettere soltanto un'incompleta verifica sperimentale di questa legge; i Suoi galvanoscopi ad effetto fisiologico, pur essendo sensibilissimi, non potevano fungere da misuratori, bensì soltanto da comparatori di energia, perchè le contrazioni ed in genere le sensazioni prodotte dalla scarica possono essere tra loro bensì paragonate, ma non misurate. E siccome « le commozioni riescono in qualche maniera diverse riguardo alla loro qualità, ossia al senso e impressione che fanno sugli organi, secondo che provengono da picciole bocce cariche fortemente o da grandi cariche debolmente » (5), era opportuno stabilire il confronto soltanto tra commozioni molto leggere, perchè per queste la diversità accennata non riusciva neppur rimarcabile; « ... dunque la grandezza della capacità nelle bocce supplisce esattamente, come pare, o quasi esattamente alla minor tensione...: e siccome il prodotto di questa tensione nella quantità di fluido elettrico risulta il medesimo, così pure uguale è la scossa, eguale almeno il suo valore; nè si accorge che differisca nella qualità, ossia modo di affettare gli organi » (5).

Questa tempra o tono o timbro della commozione, se anche

Digitized by Google

rendeva più difficile il riconoscimento delle scosse dello stesso polso o validità, non indicava perciò una deficenza del galvanoscopio fisiologico, bensì ne rivelava piuttosto un pregio, in quanto che conduceva alla scoperta del secondo carattere della scarica, ossia a quello della sua durata. E neanche questo secondo carattere, nè le sue notevoli conseguenze potevano sfuggire alla acuta mente del Volta: « Si è creduto di spiegare sufficientemente come e perchè una batteria,... caricata ad un grado debolissimo produce una forte scossa, quale non è prodotta da una picciola boccia carica al medesimo grado,... col dire semplicemente, che gli è perchè la capace... batteria scarica in un istante una più grande quantità di fluido elettrico che la boccetta... Ma non si è fatto attenzione che questo termine in un istante non è rigorosamente giusto, che egli è anzi assolutamente falso, se si intende un momento indivisibile... giacchè a carica uguale la tensione elettrica, e per conseguenza la velocità con cui il fluido elettrico viene spinto,... è la medesima... ma la scarica grandi... dura più istanti che quella delle picciole bocce... ella si estende, per così dire, a molte scariche successive, quantunque si compia ancora in un tempo cortissimo, tale che a noi pare un istante... Ciò ritenuto, parrebbe... che il fluido elettrico essendo... spinto... colla medesima velocità, tanto dalla picciola boccia, quando dalla grande, cariche ad egual grado di tensione, dovrebbe urtare o scuotere ugualmente nell'uno e nell'altro caso la persona attraverso di cui si scarica » (6); invece « è cosa ben sicura che le impressioni portate sopra i nostri organi non si estinguono all'istante, ma durano qualche tempo. Quando dunque e le prime impressioni sussistendo ancora, ne sopravvengono delle altre in seguito, tutte queste impressioni si accumulano, per così dire, e ne risulta un'impressione altrettanto più viva ed energica » (6). « Ma se dunque la scossa riesce tanto più valida quanto è maggiore il numero d'istanti che dura la scarica, ossia la corrente elettrica,... cosa dovremo poi aspettarci da una pila,... forse una scossa smisurata? Non già; essendochè le impressioni successive, che si accumulano in certo modo, e confondendosi assieme, ne formano come una sola altrettanto più efficace e risentita,... sono quelle solamente che si compiono entro un tempo cortissimo. Or questo tempo influente alla forza della scossa possiam credere che si limiti a un dipresso ad un minuto terzo » (5). « Durando di più,... comin-

Digitized by Google

ciamo a distinguere la durata della sensazione dall'intensità » (6).

Riassumendo, la validità della scossa dipende non solo dalla velocità o urto del fluido elettrico, ossia — a parità di circuito — dalla tensione, bensì anche dalla rapidità con la quale si succedono questi urti, ossia ancora una volta dalla tensione: essa ci rivela dunque la potenza della corrente, che è quanto dire la grandezza dell'energia elettrica che attraversa il galvanoscopio in un dato tempo, nel tempo cioè che misura la durata dell'impressione portata sugli organi animali; essa ci rivela l'intiera quantità di energia che si scarica, soltanto nel caso che l'intiera scarica si effettui in un tempo non superiore a questa durata. Così si spiega perchè una o più persone che « comunichino in acconcio modo da una parte alle armature esterne della batteria, dall'altra parte alla base della pila, la quale con la sommità va a toccare il conduttore metallico procedente dalle armature interne della batteria » (6) sentano all'atto della carica una scossa che è « più debole notabilmente della scossa che potrà poi aversi per la scarica della batteria medesima » (6): la quantità di energia che passa è in ambedue i casi la stessa; però nella scarica questo passaggio è più rapido, perchè la corrente non incontra l'impedimento dei bollettini, che, anche se ben impregnati di acqua salata, oppongono una resistenza molto maggiore dei metalli; la corrente di scarica risulta perciò più potente di quella di carica, e ce ne avverte la diversità della scossa, perchè la carica dura un tempo maggiore di quello che misura la durata dell'impressione portata sui nostri organi.

Chiari appariscono dunque nel pensiero di Alessandro Volta i concetti di energia e di potenza elettrica, ed accurata la loro misura; il Suo contributo nel campo dell'energetica non poteva essere più brillante. L'effetto fisiologico della corrente, da Lui giustamente interpretato, era — tra i vari effetti della corrente — certamente il più complesso; la natura si era mostrata anche allora, come sempre, gelosa dei suoi segreti. Ma per la prima volta un nuovo fenomeno, che dischiudeva sì vari orizzonti, veniva studiato con tanta profondità ed in maniera così completa da un solo Grande: con tanta profondità ed in maniera così completa, perchè, senza misconoscere i meriti degli illustri scienziati che proseguirono la Sua opera, senza sminuirne l'importanza delle loro indagini ed il valore delle loro scoperte, possiamo ben dire che la via da battere era già stata chiaramente

Digitized by Google

segnata e vivamente illuminata dal lampo che aveva squarciato le tenebre.

Pola, maggio 1927.

---

(1) Memoria prima sull'E. A.
(2) Memoria seconda sull'E. A.
(3) Memoria sulla capacità dei conduttori ecc.
(4) Frammento sui risultati di esperienze ottenute con scariche di giare cariche con pile.
(5) L'identità del fluido el. ecc. vittoriosamente dimostrata ecc.: Memoria comunicata al prof. Configliachi.
(1) Memoria del prof. Alessandro Volta sull'identità ecc.

L'Esposizione Voltiana — Il Tempio Voltiano L'edizione nazionale delle opere di Alessandro Volta

DI

MARIA MARCALETTI.

Le prime due parti di questo scritto hanno lo scopo di dare a coloro che non avessero avuto la fortuna di poter compiere un pellegrinaggio alla meravigliosa cittadina lombarda, un'idea di quanto Como ha fatto, per onorare, nel primo centenario della morte, il suo illustre figlio, **ALESSANDRO VOLTA.**

L'Esposizione Voltiana.

Sorge, l'Esposizione Voltiana, alla Villa Olmo, in una sede veramente degna del Grande la cui memoria si volle celebrare. Il lussuoso palazzo che, delle costruzioni per l'esposizione stessa, forma a guisa di gioiello in un monile, il nucleo centrale, ha una breve, ma importante storia, ed è una affermazione potente dell'arte italiana.

Venne ideato dall'architetto Simone Cantoni per conto del marchese Innocenzo Odescalchi, e nel 1782, cominciò a specchiare la sua mole nelle limpide acque del lago, nel luogo dove, ai tempi della gloria Romana, sorgeva la villa di Caninio Ruffo. Appartenne poi al marchese Raimondi Mantica: subì l'oltraggio

Digitized by Google

d'esser trasformato in caserma nel 1845 dagli austriaci e ridotto in miserevole stato, finchè nel 1883 divenne proprietà di una delle più cospicue famiglie lombarde, quella dei duchi Visconti di Modrone da cui, per un prezzo che dimostra una generosa liberalità veramente signorile, venne ceduta al Comune di Como, il quale, a esposizione finita la farà sede del suo Museo Civico e adibirà lo splendido Parco a pubblico passeggio. La villa e il parco son congiunti a Como da una serie di giardini, a cominciare da quello bellissimo pubblico che fu un tempo della Villa Cornaggia, giardini lieti di fiori in ogni stagione e alzantisi dolcemente sulle montagne che circondano il lago, dove l'armonia infinita e riposante della natura è stata secondata dall'uomo con le ville, alcune (meravigliose per arte e per costruzione) che appartennero o appartengono a storiche famiglie; altre più umili, le quali nascoste in modo civettuolo nel verde, offrono pure un soggiorno di pace. E lo stesso splendido spettacolo si offre a chi, volgendo le spalle alla villa, e stando sul pontile appositamente costruito, guarda la piccola conca, che costituisce il primo bacino del lago, e la sponda opposta la quale pure tutta festante di luce e di colori, porta alla punta di Villa Geno, che è una delle sedi dei congressi scientifici di importanza mondiale che quest'anno hanno chiamato dotti d'ogni paese alla patria del Grande Italiano.

Nell'atrio della Villa il visitatore è salutato dalle cicogne giganti, in antico bronzo, e dalla bella scultura dell'Argenti, rappresentante la dea Pomona: da esso si entra nel grande salone, maestoso di marmi, di stucchi, dorature, di dipinti in stile Luigi XVI con medaglioni di Domenico Pozzi e dell'Appiani con fregio a bassorilievo del Thorwaldsen; otto statue rappresentanti divinità dell'Olimpo pagano fan compagnia a colui che, cercando un momento di riposo, seduto in uno dei comodi divani messi a disposizione del pubblico, contempla il Parco, dove stanno le mostre di floricultura e di frutticultura.

L'Esposizione consta di due parti principali: quella degli impianti e delle applicazioni scientifiche e industriali che derivarono dalla scoperta del grande Comasco e quella delle industrie soriche. Chi volge le spalle al lago e guarda la villa, ha alla sua sinistra la lunga galleria sede della esposizione nazionale delle industrie idroelettriche. Similmente, ma in modo assai più grandioso e cospicuo di quanto si vide anni fa a Grenoble

Digitized by Google

o a Basilea, sono esposti disegni, plastici, fotografie stupende, album con dati di riferimento che rivelano, da un lato quanto la Patria nostra debba ad Alessandro Volta, il quale con la sua scoperta diede al mondo e al lavoro umano una nuova sorgente di energia, e dall'altro quanto l'Italia abbia fatto, voglia e possa ancor fare per usare la ricchezza immensa delle sue acque per affrancarsi dal carbone straniero. Vediamo le bellissime fotografie e i plastici degli impianti dell'Alta Italia: quelli della Città di Milano, all'Adamello, della Edison, della Società Elettrica Italiana piemontese (Sip), quello imponente del Ponale, quelli dell'Unione esercizi elettrici (Marche), di Nizza, nella Venezia Tridentina, e così via, fino a quelli del servizio idrografico che dipende dal Ministero dei lavori pubblici e delle comunicazioni, e agli impianti idroelettrici di Bardonnecchia e del Sagittario per le ferrovie dello Stato. Di questi alcuni esistevan già, da tempo almeno nelle loro prime parti, e le bellissime fotografie richiamano a noi qualcosa di noto e di caro: ma poi rimaniamo ammirati allorchè osserviamo i rilievi, i disegni, gli acquarelli riproducenti quel che si è fatto e si sta facendo nell'Italia Meridionale, nella Sicilia, nella Sardegna in regioni cioè dove, per la minore ricchezza d'acqua, l'uso dell'energia potenziale di quella esistente richiede, ancor più che nel settentrione la costruzione di dighe, di acquedotti, di sbarramenti grandiosi, che son miracoli della moderna ingegneria. È pure meraviglioso il fatto che questi impianti, i quali creano laghi, tolgono e ridonano acque ai torrenti, cambiano il livello del letto delle vie d'acqua, ad alcune alterano perfino il corso non deturpin la natura, ma si direbbe la integrino con la loro potenza e la loro armonica severità.

Per farsi un'idea dello slancio meraviglioso che in questo ramo anima la nostra Patria: basta osservare le due belle carte geografiche poste all'Esposizione nella galleria di cui sto parlando. Minuscole lampadine che di mano in mano si accendono su di esse rivelano: in una il progressivo aumento, anno per anno, delle centrali elettriche, nell'altra delle ferrovie a trazione elettrica. Da pochi lumicini che, intorno al 1900, rivelavan impianti simili nell'Italia settentrionale, son miriadi di piccole stelle che brillan sulla carta d'Italia del 1926, dall'Alpi alla punta meridionale della penisola!

Dalla galleria stessa si passa in quella grandiosissima delle

Digitized by Google

« Comunicazioni elettriche con e senza filo » Nelle varie parti della costruzione prima circolare, poi rettangolare, poi elittica nel grande salone che si riservarono la Germania e gli Stati Uniti, ogni paese aderente all'Esposizione ha posto, in mostre storiche e cimeli quanto fece, con fotografie, rilievi, riproduzioni di impianti (in proporzioni naturali, impiccollite o ingrandite) quanto può e fa in fatto di telegrafia e telefonia con e senza filo. Con i cavi per il telegrafo transoceanico e col modello di Nave posacavi della Società Pirelli, coi cavi per le linee telefoniche interurbane, coi più antichi e più moderni sostegni per le linee aeree, noi vediamo i più recenti modelli di telefono automatico, ad esempio e i più recenti modelli di apparecchi in cui l'energia elettrica facilita il lavoro giornaliero in banche o grandi opifici e giungiamo fino agli impianti radiotelefonici.

Impianti radiotelefonici stan per tutta l'esposizione; a una certa ora del giorno e della sera, tutte le sale insieme si animano di notizie, di canti, di suoni. — Gli stati esteri rivelan così la loro potenza in un campo scientifico — industriale in continuo progresso: ma, nello stesso tempo, essi rendono grande omaggio al genio italiano, nei grandi nomi del Volta e del Marconi!

Nè meno interessanti sono le mostre statali di elettricità; nel magnifico susseguirsi delle sale della villa Olmo, ogni governo espone plastici, disegni, riproduzioni dei suoi impianti telegrafici e telefonici. L'Italia ha cinque sale; in una, la commovente mostra retrospettiva: perchè noi che viviamo in un momento in cui l'uomo domina assolutamente lo spazio in terra, in mare, in cielo, in cui le distanze son soppresse e il nostro scritto, la nostra voce giungono in poche ore a migliaia di chilometri, dobbiamo ricordare con riverenza i primi apparecchi telegrafici Caselli, quello Henley a doppio indice che trasmise i segnali da Napoli a Caserta nel 1852, i sostegni per le linee telefoniche, sistema Bonelli, che videro la luce in Piemonte nel 1851. Un'altra sala è riservata ai telegrafi e telefoni da campo, due altre agli apparecchi per la Regia Marina. L'ultima delle sale è riservata al Governatorato di Roma: si vedono le fotografie delle due centrali che danno l'energia elettrica al Lazio, un bel rilievo degli impianti relativi, e belle vedute di Roma illuminata. La Francia ha pure tre sale: da modelli del primo telegrafo Chappe, arriviamo fino ai plastici degli impianti

Digitized by Google

radiotelegrafici: una sala ha l'Olanda, un'altra l'Inghilterra, un'altra la Germania, con uno sviluppo storico assai interessante delle invenzioni del Volta nella Germania stessa; due ne han gli Stati Uniti dove si ammirano belle fotografie trasmesse telegraficamente a distanza, interessantissimi diagrammi sul successivo sviluppo del sistema telefonico Bell, disegnati in modo assai suggestivo e un modello della prima centrale telefonica del mondo, quella costruita nel 1878 a New-Haven nel Connecticut.

Infine, una delle sale è dedicata, non a mostre statali, ma a Guglielmo Marconi; vicino ad uno schema ricordante come il francese Turpan abbia nel 1894 mandato a 25 metri di distanza onde della lunghezza di cm. 50, stanno apparecchi dovuti al grande elettrologo italiano, nei successivi sviluppi delle sue invenzioni e dei suoi studi, da quelli del 1900 fino a quelli attuali, culminanti in un grande rilievo dell'impianto per onde corte a fascio del 1927 a Boomin in Cornovaglia. Nella sala Marconiana, ora che il tempio Voltiano attende ancora di essere inaugurato, sono esposti tre volumi dell'edizione nazionale delle opere e alcuni manoscritti di Alessandro Volta: di questo dirò qualcosa in appresso: ma voglio subito far notare come opportunamente furono avvicinati gli scritti del grande fisico (alla cui scoperta si devon le trasmissioni elettriche con filo da lui stesso divinate) a quelle conquiste moderne, che fanno del nome del Marconi, quello di uno dei più grandi scienziati viventi e, insieme, dei più grandi benefattori dell'umanità. Quanto cammino in poco più di cento anni, quanta gloria per il nostro paese!

Ho accennato, in principio, all'esposizione delle industrie seriche. La lavorazione della seta, vanto secolare della Lombardia, è qui riassunta in un'artistica sintesi del suo svolgersi e dei suoi risultati. In un'ampia galleria, parallela a quella della mostra nazionale per le industrie idro-elettriche, stanno, in azione continua, mosse dalla corrente elettrica, le più moderne macchine che, cominciando dallo svolgere dal bozzolo il preziosissimo tenue filo, arrivano fino a presentarlo in matasse, tinte a smaglianti colori. Si entra poi nella grande galleria del lavoro dove telai meccanici in continuo movimento, producono stoffe, nastri, scialli. In una rientranza della galleria stessa, costruita così da richiamare gli ambienti del tempo, sta una calma rievocazione storica, quasi oasi di pace nella febbre del lavoro moderno, data da un telaio a mano del secolo XVI.

Digitized by Google

Il Tempio Voltiano.

Il Tempio Voltiano non è costruzione passeggera, come quelle che, ospitando l'esposizione, completano ora Villa Olmo. Vero sacrario del Grande, sarà tempio a cui sempre potranno convenire, con reverenza i devoti della scienza, anche nei secoli venturi. Esso sorge nel giardino pubblico, sulla sponda del lago: semplicissimo, coronato, come un Pantheon, da una cupola centrale, consta, nella sua parte essenziale, di un salone circolare di circa 12 metri di diametro, che, ricinto da un colonnato, occupa circa un terzo dell'area totale. Il piano principale è a m. 2.30 circa dal livello del terreno, così che, i cimeli che nel tempio saranno ospitati, godranno l'incolumità da ogni piena del lago: a tale piano, costituito dalla rotonda e dai localetti circostanti, staranno gli strumenti, i documenti, i ricordi del Grande; nell'ammezzato il pubblico potrà vedere cose minori, e troverà pure posto una « biblioteca voltiana ».

Il paramento esterno è in quella pietra di Aurisina (la Nabresina degli Slavi, presso Trieste) che già si ammira nelle belle opere delle Venezie, di Ravenna, di Rimini, di Verona, risalenti ai tempi dell'Impero Romano: un calcare resistente, caldo di tinta, splendido se lucidato: invece i fondi murali, le fasce di fregio, di parapetto, e il nucleo della cupola sono, come usava nell'epoca — quella napoleonica — a cui il tempio è inspirato, a intonachi in cemento di tinta tenue, mentre nell'interno dominano gli stucchi a tinte leggere, ravvivate da sobrie policromie di fondo. Se l'ambiente architettonico venne scrupolosamente dedotto da costruzioni di quell'epoca di cui il Grande fu una delle più alte e pure glorie, il contenuto del Tempio è documento prezioso, assurgente, per lo meno in parte, a quasi religiosa reliquia; nel Tempio trovano il loro immutabile e eterno loco, il sarcofago ove per quarantotto anni dormì Alessandro Volta l'estremo sonno, e gli apparecchi, scampati all'incendio del 1899, di cui il Grande si serviva nelle sue esperienze; e che, da allora fino ad oggi, furono custoditi dal Museo Civico di Como: pochi sono, tali apparecchi, pur troppo: qualche condensatore a quadro, parecchi elementi di pile a colonna, la macchina elettrica del Nairne, a cui il Volta propose di sostituire l'unico cilindro di vetro con parecchi altri più piccoli..... Nel

Digitized by Google

Tempio stanno in più cimelii, ossia apparecchi di cui il sommo fisico si serviva nei suoi studi a Como e a Pavia, ricostruiti dai pochi, informi frammenti rimasti dall'incendio del 1899. A tale amorosa e dotta ricostruzione, a cui dobbiamo di riavere e tramandare ai posteri il patrimonio completo degli strumenti voltiani nella loro autenticità, attese una riunione di dotti, quali il Cav. Morlacchi, il prof. Grassi, il prof. Murani di Milano, il prof. Mori e il prof. Trainini di Brescia, il prof. Amerio di Pavia e il prof. Massardi (dirigente l'edizione nazionale delle opere voltiane) che son gli ultimi scienziati che ebbero l'onore di aver fra mano gli apparecchi autentici, integri tutti.

Devo al Trainini ed al Cav. Morlacchi la fortuna di aver ammirato l'eudiometro a fosforo, l'eudiometro a scintilla, la pistola, i vari modelli di elettroscopio condensatore e dell'elettroforo perpetuo, l'apparecchio per lo studio di quel che il Volta chiamava il rango del ferro rispetto al mercurio (cioè la differenza di potenziale derivante dal contatto dei due metalli), la bilancia per lo studio delle reciproche azioni di due masse elettriche, la pila a colonna, la pila a corona di tazze nei modelli antichi, gli apparecchi per lo studio dell'elettricità atmosferica e delle origini di essa, i cilindri di vario raggio e varia altezza fino a diventar tubiformi, per lo studio della capacità dei conduttori, e così via. Tutto è ricostruito con così appassionata dottrina da riprodurre, per ogni apparecchio, non soltanto l'aspetto esterno, ma il congegno dell'apparecchio autentico e distrutto, in modo che ogni strumento rifatto funzioni, in mani esperte, come funzionava l'antico in quelle del grande Fisico che l'ideò. — Ma la dotta attività del ricostruttore si spinse anche più in là: con culto mirabile, essa ricercò nelle opere del Volta la descrizione di apparecchi che il grande certamente costruì e che andaron perduti alla morte di Lui. Così è per la pila a coppette di rame, stagnate nell'interno, sovrapposte l'una all'altra colme di acqua acidulata — pila di cui è fatto cenno nel vol. II delle opere e che segna il passaggio fra la prima, costruita a colonna, e quella a corona di tazze — per la macchina elettrica a cilindro di seta, e così via. Non si tratta di apparecchi grandiosi, ma assai semplici, quasi scheletrici e rudimentali: ma, dal loro esame, tanto più grande appare essere il genio del Volta, che da essi trasse risultati mirabili di ampiezza e di precisione. Oggigiorno l'industria, che grazie alla fisica potè raggiungere

Digitized by Google

uno sviluppo che ingigantisce ad ogni ora, vien in sussidio però degli studiosi col preparare loro apparecchi perfezionati: un secolo e mezzo fa le mani dello scienziato dovevan preparare gli strumenti che sperimentassero, traducessero in atto, aiutassero le divinazioni della mente geniale, e tali strumenti noi oggi guardiamo con commossa ammirazione.

Dei manoscritti del Volta, farò cenno nel breve riassunto che verrà in appresso sull'edizione nazionale delle opere. Qui ora ricordo come, nel Tempio, troveranno posto gli esemplari dei volumi finora usciti di tale edizione e di quelli che ancor attendono di vedere la luce, affinchè il pubblico possa sempre in qualunque tempo, ammirare la riproduzione delle venerande pagine.

Il faro Voltiano.

Sull'altura di Brunate, presso S. Maurizio, dal principio di settembre un alto faro illumina, la notte, Como e i luoghi Voltiani: la costruzione di esso, ideato già fin dal 1899 da Don Guanella, si potè ora compiere mercè il valido appoggio del Governo Nazionale; la luce che da esso emana ed emanerà nei tempi futuri simboleggia la luce di progresso che le scoperte di Alessandro Volta versarono sull'umanità.

L'edizione nazionale delle opere di Alessandro Volta.

Com'è noto, nè nell'esposizione Voltiana stanno, nè il tempio Voltiano ospiterà i manoscritti scientifici del Volta. Questi manoscritti, salvati quasi per miracolo (grazie all'energia del Ferrini che si oppose al loro trasporto a Como) dall'incendio del 1899, saranno sempre ospitati nella seconda di due salette, dette Voltiane, (la prima contiene tutte le pubblicazioni — in ogni ramo delle arti e delle scienze — che riguardano i tempi in cui visse il grande Comasco) presso l'Istituto Lombardo di scienze e lettere a Milano, in apposite scansie, e offerte lì alla venerazione dei dotti che li vorranno compulsare. Non tutti i manoscritti stessi compariranno riprodotti nell'*Edizione nazionale delle opere:* un'apposita commissione li esaminò, con metodo prima analitico, poi sintetico e comparativo. Poichè il Volta notava con scrupolosa cura ogni suo studio, ogni sua esperienza, ogni suo calcolo, si trovan, tra le sue carte, scritti ripetuti, sullo stesso argo-

Digitized by Google

mento riferentesi ai vari successivi tentativi in proposito. Attraverso a queste, non soltanto il profano, ma anche chi non abbia conoscenze profonde in argomento, può perdersi: perciò nei sei o sette volumi che comporranno il grande monumento offerto al pubblico dalle opere del sommo fisico italiano, sono (in quelli già usciti), saranno, (in quelli che ancor devono vedere la luce), raccolti corredati e riuniti gli uni agli altri con note critiche e di riferimento) quegli scritti che sono più atti a dare, non tanto l'idea dei ripetuti tentativi del grande, quanto quella, completa e sintetica, del progressivo svolgersi del suo pensiero e delle sue conquiste in ognuno dei campi dove egli mosse il sicuro piede.

Alla cortesia del Prof. Francesco Massardi che dal 1922, con pazienza da cenobita e con illuminato amore di studioso, attende all'esame delle venerande pagine, devo se il mio occhio reverente si potè posare fin dallo scorso aprile sui fogli fittissimi di nitida calligrafia, oppure irti di lunghissimi calcoli o illustrati da schizzi.

Basta gettare uno sguardo su quei cimeli d'inestimabile valore, per essere un'altra volta convinti della profondità dello spirito matematico del grande comasco, il quale, non di rado, valendosi soltando delle quattro operazioni e della regola del tre, giunse a risultati che ora sono vanto della fisico-matematica: come basta leggere alcune di queste pagine, per constatare come il Volta — vivente nei tempi felici in cui gli scienziati non sdegnavano di poetare e poeta egli stesso, talvolta gentile, talvolta sarcastico, talvolta (nel carme in onore del De Saussure per la salita al Monte Bianco) di forte espressione — rivestisse di chiara, elegante perspicua forma le sue idee e le sue scoperte.

Sono ora usciti, dell'edizione Nazionale delle opere, quattro volumi.

Non è necessario qui rammentare come il periodo dell'attività scientifica di Alessandro Volta, che decorre dalla scoperta del Condensatore (1782) all'inizio della grande questione da cui trasse le sue origini la scoperta della pila (1792) sia specialmente rivolto alla elettrometria e alla Metereologia elettrica e come in questi pazienti studi, e nella finezza delle relative esperienze abbia trovata la preparazione dottrinale e spirituale per quello che fu la sua grande polemica e il suo trionfo: è noto pure come

Digitized by Google

la storica controversia si possa dividere in tre parti distinte: la prima comprende l'iniziale accettazione fatta dal Volta delle idee del Galvani, fino al mettere in luce la teoria del contatto; alla seconda parte, la quale dura circa un anno (1795-1796) (che si può considerare come di transizione e a cui appartiene una prima generalizzazione del principio del contatto) segue una terza parte che decorre dal 1796 al 1800, in cui il Volta afferma, generalizzandolo completamente, tale principio con la dimostrazione che la forza elettromotrice è « piccola nel contatto di due conduttori di seconda classe, mediocre nel contatto di due conduttori uno di prima e uno di seconda classe, forte nel contatto di due conduttori di prima classe » culminando poi nella scoperta della pila (fine del 1799 e principio del 1800).

Scritti inerenti a tali tre fasi dell'opera del grande fisico sono materia del *primo volume della edizione Nazionale delle opere* con dodici memorie o scritti appartenenti al primo periodo, e indirizzate, le lettere al Baronio, all'abate Tomaselli (in questa il Volta enuncia il principio del contatto in forma generale, e applica poi tale principio ai fenomeni in esame in senso più ristretto) al Van Marun, a Tiberio Cavallo e all'abate Anton Maria Vassalli, (il Volta arriva qui alla conclusione che nei fenomeni considerati dall'anatomico bolognese gli organi animali funzionano esclusivamente quali elettroscopi di grande sensibilità).

Alla seconda parte appartengono cinque lettere indirizzate al Banks, a Orazio Delfico, al Vassalli, al Macchetti e ancora al Vassalli; per la terza son pubblicati nel primo volume sei scritti o gruppi di scritti: un insieme di lettere al Green in cui sono studiati i diversi tipi di comportamento reciproco dei conduttori, memorie che fan seguito alle lettere già citate al Van Marum: lettere all'Aidini sulla « pretesa elettricità animale »; il tutto culmina nella celebre lettera a Sir Joseph Banks in data 20 marzo 1800 in cui il Volta descrive con parole ammirate il suo « organo elettrico artificiale ».

Nel *volume secondo dell'edizione Nazionale delle opere* numerose lettere, dissertazioni particolari trattano e saggiano i fenomeni che si possono ottenere con la pila, vale a dire gli effetti elettrochimici, elettrofisiologici, elettrometrici della pila e le applicazioni che ne derivano: appartengono a questo gruppo una lettera al Brugnatelli dell'autunno del 1800, che ne riproduce una Landriani sugli effetti ottenuti dal Nicholson, una all'Abate

Digitized by Google

Anton Maria Vassalli, un'altra al cittadino N. N. (1801) in cui sono accennate le identità del fluido elettrico col preteso fluido galvanico.

Ma memorabile importanza hanno gli scritti che compongono la rimanente parte del volume indirizzati tutti alla trattazione teorica e alla dimostrazione sperimentale che il fluido posto in moto dalla pila è identico al fluido elettrico. A una lettera a Jean Claude de la Métherie in data 10 ottobre 1801, segue la classica memoria sull'identità del fluido elettrico col galvanico, letta nelle storiche sedute del 1801 all'Accademia di Francia, memoria nella quale il Volta si propone di dissipare le obiezioni sulla pretesa mancanza di alcuni dei segni elettrici e sulla debolezza di altri in confronto alle forti scosse che si hanno dalle pile, sulla esistenza di sostanze che lasciando passare il fluido elettrico, fermano quello galvanico, sugli effetti chimici che si ottengono dal suo apparato. In appendice a tale memoria stanno un gruppo di note storiche riguardanti il rapporto del Biot (2 dicembre 1801) sulle esperienze relative all'elettricità di contatto, documenti sulla fondazione del premio Bonaparte e la cronologia degli Atti dell'Istituto Nazionale di Francia. Seguono poi lettere e memorie, quali una descrizione della pila, pubblicata in data 6 novembre 1801 in « Journal de Chimie et de Physique » uno scritto al Landriani che considera i fenomeni elettrometrici della pila, li misura e ne studia gli effetti valendosi o no del condensatore; indi si occupa degli effetti fisiologici e chimici della corrente mossa dalla pila; vien poi la memoria rispondente alle obiezioni del Nicholson il quale attribuiva la massima parte dei fenomeni della pila all'azione dei liquidi sui metalli, seguono lettere al Brugnatelli, all'Amoretti, al Configliachi, appunti (1805) su studi relativi a pile costruite in piattelli d'osso bagnati di varie sostanze; e infine una memoria sull'identità del fluido elettrico e galvanico (quella che presentata a Modena nel 1805, intestata al nome del Baronio, per un concorso scientifico... non venne premiata) memoria, che grazie anche agli studi compiuti dall'attuale Pontefice allorchè era direttore dell'Ambrosiana, è provate essere tutta, testo e note, opera del sommo fisico comasco: in essa stan riassunti in sette articoli tutta la controversia famosa col Galvani e le indagini e gli sviluppi successivi della teoria Voltiana. Infine, dopo altri scritti che esauriscono, ampliandoli, gli studi della memoria citata e studiano lo « sbi-

Digitized by Google

lancio del fluido elettrico » determinato dal contatto di metalli disparati, la possibilità di un conduttore luminoso perpetuo, il volume secondo termina con frammenti sulle scoperte e invenzioni del Volta dall'elettroforo alla pila.

Nel *volume terzo* stanno le prime ricerche sull'elettrostatica che sono anche, cronologicamente le prime a cui il Volta si dedicò. Vi si trovan lettere ormai classiche nella storia della fisica, al padre Beccaria, a Lazzaro Spallanzani, al Priestley, al canonico Fromond, a Marsilio Landriani, al padre Barletti, al padre Campi, al De Saussure. Qui stan, fra l'altre, la famosa lettera del 1769 « De vi attractiva ignis elettrica » l'altra memoria « Novus ac semplicipimus electricorum tentaminum » e — di somma importanza — la lettera al padre Landriani (3 giugno 1795) in cui si prelude all'elettroforo; i brani di scritti, indirizzati al padre Campi, in cui tale invenzione è annunciata, e, infine, la lettera al Priestley (10 giugno 1775) che lo descrive completamente:

Infine in questo volume sta la memoria sul condensatore, accompagnata da un'appendice, memoria che, priva di questa, era stata letta alla Società Reale di Londra il 14 marzo 1782 e tradotta in francese dall'abate Rozier nel 1783. (La traduzione è pure pubblicata in questo volume).

Nel presentare questo volume all'Istituto Lombardo il 29 aprile 1926 l'illustre professore Carlo Somigliana osservò « Qui ci troviamo spesso a contatto con l'animo stesso dell'autore, anche per la forma epistolare, che lo induce a esprimere con spontaneità e larghezza i suoi sentimenti e le sue riflessioni intorno alle marche e alle scoperte di cui parla ». Sta in una delle lettere di questo volume la famosa frase del Volta ventenne. « Io ho il genio dell'elettricità » e qui si trova la lettera al padre Barletti (1777) sulla possibilità di ottenere una scarica a distanza, corredata da un ingegnoso disegno, che tanto commuove chi l'osserva ora, in tempi in cui, grazie al Grande di cui parliamo, possiamo scrivere, parlare e, fra poco, potremo anche vedere alla distanza di centinaia e centinaia di chilometri.

E qui si trovan le parole modeste, ma ammirate e convinte con cui egli descrive l'elettroforo. « Ho costruito un piccolo apparecchio semplicissimo... In questo ho stampata, dirò così una elettricità tale che non si estingue mai più... senza corredo di macchina... e ho segni affatto vivaci, bastevoli a elettrizzare fortemente un ben capace conduttore, un uomo isolato... ».

Digitized by Google

Il *quarto volume*, l'ultimo di quelli finora usciti, mostra vari aspetti dell'attività del sommo fisico. Una metà circa delle pagine che lo compongono si riferiscono specialmente a misure elettriche; un altro centinaio a questioni di elettromozione, il resto a scritti didattici.

Gli scritti della prima parte, quasi tutti inediti finora, riguardano l'attività del Volta dopo il 1783, periodo a cui appartengono gli studi sull'elettrometria che si collegano poi alle prime lettere sulla metereologia elettrica; tali scritti, divisi in otto gruppi a seconda degli argomenti che essi trattano, basterebbero soli a far del Volta uno dei più insigni fisici che il mondo abbia avuto. Seguono ad essi scritti riguardanti per la massima parte i fenomeni elettrometrici della pila, i quali, oltre che dimostrare ancora una volta in un modo luminoso lo spirito matematico del fisico italiano, attestano — per lo meno alcuni — la sua profonda conoscenza delle lingue straniere.

Nella terza parte del volume stesso son scritti didattici, quali, fra gli altri, il corso di lezioni tenute dal grande nei primi due anni del suo insegnamento (1778-1780) all'Ateneo pavese e un corso di lezioni svolte nello stesso Ateneo non prima del 1784; saggi redatti in forma precisa, chiarissima per i numerosi particolari, interessantissimi per l'impronta personale che il Volta vi imprime, saggi che danno, il primo, un'idea completa di quanto era già possesso del Volta alla vigilia de' suoi lavori sul condensatore; il secondo (che assorbe numerosi altri precedenti e il cui primo abbozzo fu steso a Parigi nel 1782) è un ampio svolgimento dei concetti riguardanti la capacità dei conduttori le atmosfere elettriche ecc.

Il *quinto volume*, già pronto per la stampa allorchè nello scorso aprile ebbi l'onore di parlare col prof. Massardi, contiene le sei lettere del Volta al professor Lichtemberger sulla metereologia elettrica (1787), lettere redatte in francese, di cui l'ultima non fu poi inviata al destinatario e le prime cinque, tradotte dal Volta stesso in italiano e compilate, rifatte in parte diedero luogo a altre sei (lettere che furon dominio del pubblico la prima volta nel 1788-89). Stanno poi in esso studi riallacciantisi alla metereologia elettrica, quali quelli sulle stelle cadenti e sui bolidi, sulle aurore boreali, sui parafulmini, sugli elettrometri adoperati a uso igrometri e così via. È da richiamare l'attenzione del lettore intorno alla memoria sulla grandine (Istituto

Digitized by Google

nazionale italiano 1806) che dà ampio e organico svolgimento a un argomento già contenuto in una delle lettere al Lichtenberger) verso una memoria al Configliachi sul periodo dei temporali e infine verso una lettera degna di particolare venerazione perchè scritta pochi giorni prima del colpo apoplettico che colpì il grande il 28 luglio 1823.

Il *sesto volume*, pare, consterà di due parti in cui saranno riportati i lavori del Volta relativi all'« aria infiammabile » all'eudiometria, alla chimica, al calore, alla tensione dei vapori saturi, ecc.

Milano, R. Istituto Tecnico " Cattaneo ,.

Direzione e Amministrazione: **Istituto G. Ferraris** — Roma
Direttore responsabile: Prof. Enrico Gradara

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore - *Città di Castello* - 1927.

Digitized by Google

ARCHIMEDE

IL METODO

Quest'opera di *Archimede*, l'ultima scoperta, tradotta per la prima volta in italiano è corredata di numerose note esplicative, critiche, storiche e di citazioni, da una prefazione e da una tavola delle figure.

Indice della prefazione. 1° Ragione della traduzione. 2° Le opere di Archimede. 3° La scoperta del *Metodo.* 4° Il contenuto del *Metodo.* 5° Le traduzioni del *Metodo.*

Indice del Metodo: Introduzione. Lemmi. 1° Area del segmento di parabola. 2° Volume della sfera. 3° Volume dell'ellissoide. 4° Volume del segmento di paraboloide. 5° Centro di gravità del segmento di paraboloide. 6° Centro di gravità dell'emisfero. 7° Volume del segmento di sfera. 8° Volume del segmento di ellissoide. 9° Centro di gravità del segmento di sfera. 10° Centro di gravità del segmento di ellissoide. 11° Volume e centro di gravità del segmento di iperboloide. 12° Volume di un particolare segmento di cilindro P. I 13° *Id. id.* P. II. 14° *Id. id.* Dimostrazione con la parabola ausiliaria 15° *Id. id.* Dimostrazione geometrica.

Inviare cartolina vaglia di **L. 6** al **Prof. ENRICO GRADARA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris***, Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Scuola Tipografica Orfanelli S. Cuore

(Perugia) CITTA' DI CASTELLO (Perugia)

Esecuzione accurata ed elegante di qualsiasi genere di lavoro tipografico di lusso e commerciale: Libri - Opuscoli - Riviste - Giornali - Cartoline illustrate ed illustrazioni - Carte intestate - Buste - Biglietti - Modelli - Registri - Libretti Colonici - Partecipazioni di lutto e di nozze, ecc.

Avendo l'azienda carattere di Scuola per orfani e non scopo di lucro, è in grado di praticare prezzi modicissimi.

Digitized by Google

COLLABORATORI

E. ALLARA — A. ANTONELLI — G. APRILE — E. ARTOM — P. BARTOLI — P. BENEDETTI — G. BEMPORAD — A. BERNINI — A. BARTORELLI — F. BERIO — U. BINI — U. CASSINA — P. CATTANEO — G. V. CAVALLARO — E. CAVALLI — F. CHIAPPETTI — C. CIAMBERLINI — A. CIANFLONE — U. CRUDELI — A. COLA — S. COMPOSTO — L. CONTE — M. DEL GIUDICE — L. DELLA CASA — G. DELITALA — G. DE STEFANO — L. DI LAZZARO — S. ENA — G. FAVARO — M. FRAILIK — O. FRANCESCHI — M. FRITZSCHE — D. GALLO — R. GALLONI — A. GANDINI — A. GASPARINI — F. GIUDICE — E. GOLDSTANF — V. GRADARA ENA — U. GRASSI — G. LACCA — P. LANZAVECCHIA — R. LEONARDI — M. LEONCINI — V. MARSEGUERRA — E. MACCAFERRI — A. MARENGONI — M. MIGLIO — G. MIRTO — M. MIRTO — U. MONETTI — A. NATUCCI — A. NEPPI — A. PADOA — F. PALATINI — P. PANICHI — G. PEANO — N. PELLEGRINI — P. PENNA — R. PISCEL — G. QUAGLIA — N. RICCI CARTOM — F. RIMONDINI — G. SABINI — U. SALINI — A. SALMOIRAGHI — A. SCALA — P. SCATIZZI — A. SCHOR — C. SCHOR — F. SIBIRANI — G. SINOPOLI — N. SIRACUSANO — G. SPINA — D. SPANO — L. TENCA — S. TOSCANO — G. VICI — E. VIGLEZIO — L. VINGIANI — G. VITALI.

Rassegna di Matematica e Fisica

Annate: I (1920-21) — II (1921-22): — III (1922-23): — IV (1923-24) — V (1924-1925): — VI (1926).

Ciascun volume con frontespizio e indici . . . . . L. **30**

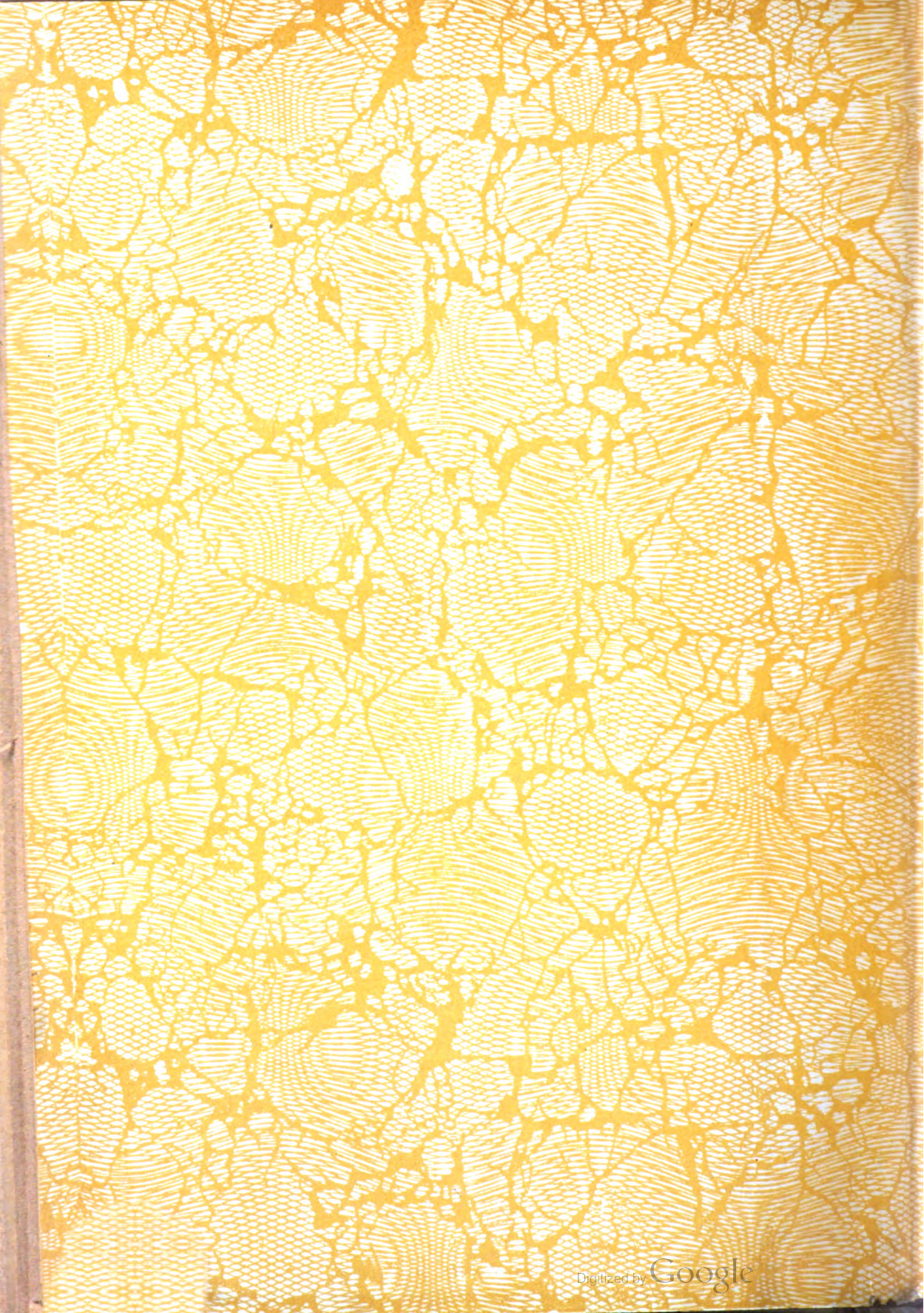
Un fascicolo separato . . . . . L. **4**

Agli abbonati, librai e rivenditori si concede lo sconto del 25 per cento.

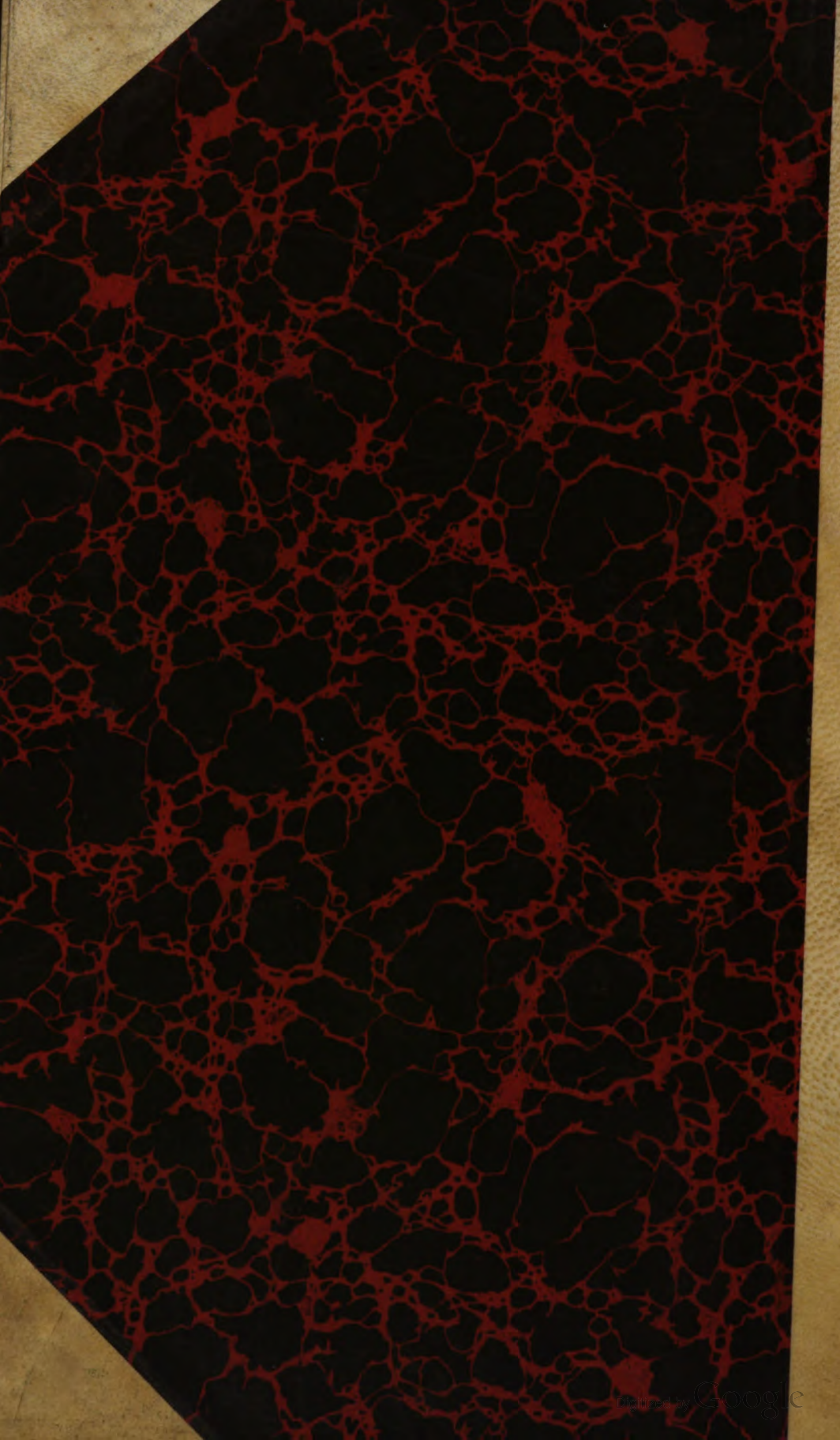
Inviare cartolina vaglia al **Prof. MARCELLO PUMA** - *Istituto Fisico-Matematico* ***G. Ferraris,*** Piazza di Spagna, 35 - Roma (6).

Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google

Digitized by Google


Digitized by Google